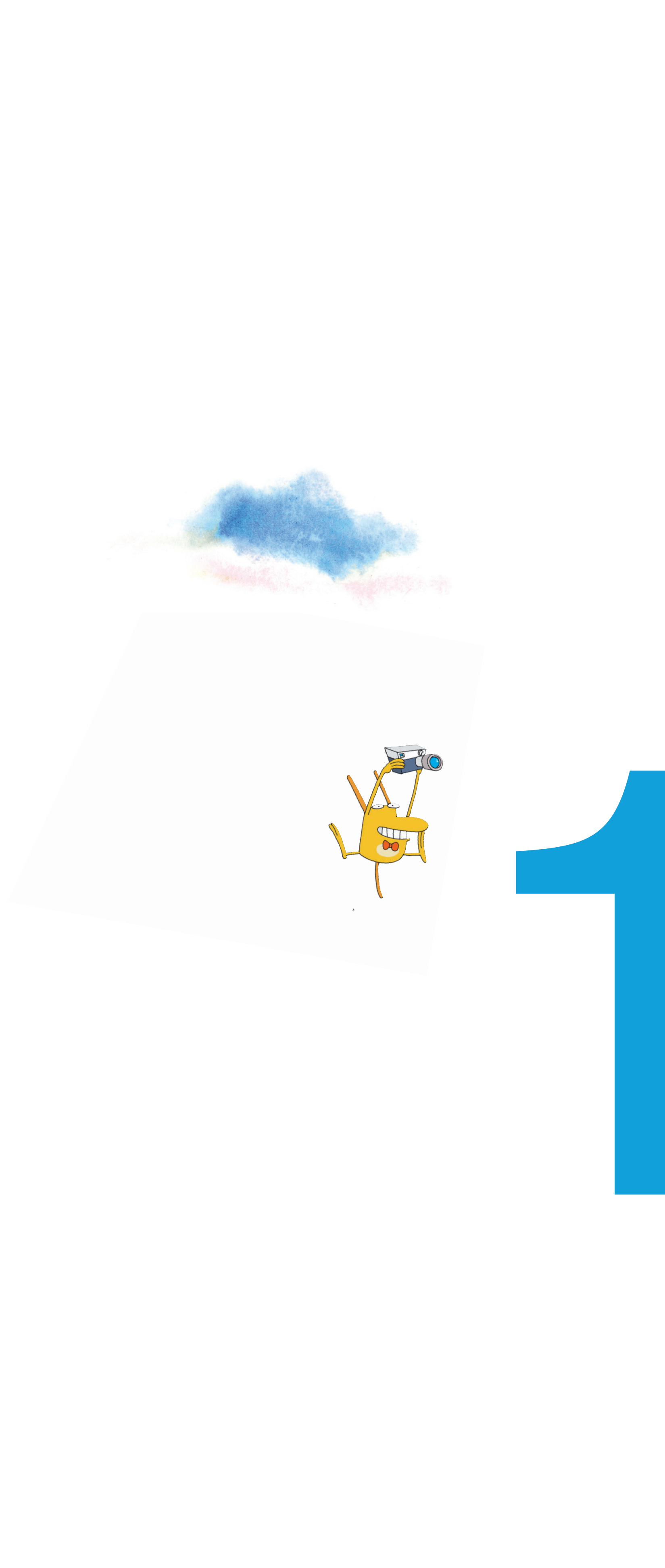


1st part ›››

총론

Ⅰ. 수학 교육의 목적

오늘날의 수학 교육을 지탱하는 사상적 기반은 유클리드(Euclid ; ? B.C. 325～? B.C. 265)의 학문지상주의(acade-micism), 헤론(Heron ; ? 10 ～? 75)의 현실주의(realism), 페스탈로치(Pestalozzi, J. H. ; 1746～1827)의 인본주의(humanism)로 볼 수 있다.
유클리드는 '원론' 13권을 집대성하여 이론 수학을 정립함으로써 지금도 학교 수학에서 그 내용을 다루고 있을 만큼 굳건한 학문의 토대를 마련하였다. 그러나 유클리드가 혼자의 힘으로 이론 수학을 정립한 것은 아니며, 그 이전의 많은 수학자들의 업적을 집대성한 것이다.
수학은 학문으로서의 이론적 토대가 정립되기 이전에 필시 실용적 목적에 의한 탐구가 선행되었던 것임에 분명하다. 이러한 점에서 헤론은 '실용 수학' 의 선구자라고 할 수 있다. 헤론의 실용 수학을 유클리드의 학문과 같은 위치에 서게 한 것은 20세기 초의 수학 교육 개량 운동이었다. 증명뿐만 아니라 실험 · 실측의 도입과 더불어 수학의 실용성을 중시하려고 한 것이다.
이러한 관점에서 독일의 수학 교육 개량 운동가였던 클라인(Klein, C. F. ; 1849～1925)의 협력자 트로이틀라인(Treutlein, P. ; 1845～1912)의 직관 기하의 창설은 큰 공적이며, 오늘날까지 초 · 중등 학교의 도형 단원의 지도에 있어서 큰 영향을 미치고 있다.
한편, 페스탈로치는 수학에 조예가 깊지는 않았지만 인간의 마음 속에서 수학을 본 사람이라고 할 수 있다. 즉, 수학 교육은 아동의 밖에 있는 수학을 아동의 머릿속에 주입하는 것이 아니라, 아동이 본래 가지고 있는 힘에 의해 수학을 만들어 내게 하는 것이 그의 교육 방법의 기본적인 생각이며, 이것이 오늘날의 활동주의적 수학 교육관의 출발점이라고 볼 수 있다.



1. 수학 교육의 목적

수학 교육의 목적은 일반적인 교육 목적의 기본 관점을 중심으로 수학의 실용적 가치의 구현, 문화적 · 교양적 가치의 함양, 도야적 가치의 구현, 창의적 활동의 실천 등의 기본적인 관점을 토대로 언급할 수 있다. 또한, 수학의 특성에서 도출할 수 있는 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등을 토대로 구체적인 목표를 설정할 수도 있다. 한편, 문화적 관점에서의 수학 문화의 가치를 이념적 차원에서의 합리성과 객관성, 정서적 차원에서의 통제성과 진보성, 사회학적인 차원에서의 개방성과 신비성 등으로 논할 수도 있다. 그러나 수학 교육은 수학적 사고력과 창의력의 육성을 그 주요한 목적으로 삼는다고 보아도 과언이 아니다.

01 일반적인 교육 목적에 대응하는 수학 교육의 목적

수학의 지도는 교육 활동의 일환으로서 타 교과의 지도에서도 생각할 수 있는 일반적인 교육적 관점이 바탕이 된다. 일반적으로, '교육의 목적' 을 생각할 경우 다음과 같은 관점이 중시되고 있다.

가. 인간이 사회의 한 구성원으로서 생활을 실천하는 데 필요한 능력을 갖도록 젊은 세대를 기르는 일
　⬅ 실용적 목적

나. 선조들의 문화 유산은 생활의 실천에서 활용될 뿐만 아니라, 그것 자체가 또한 중요한 가치를 지니는 것이므로 이것들이 다음 세대로 전승되도록 하는 일
　⬅ 문화적 · 교양적 목적

다. 인간이 본래 가지고 있는 여러 가지 능력을 끄집어 내어 갈고 닦는 일 ⬅ 도야적 목적

라. 창의적인 실천 활동을 할 수 있고, 거기에서 아름다움과 즐거움을 찾을 수 있도록 하는 일
　⬅ 창의적 목적

이와 같은 일반적인 교육의 목적에 대응하여, 수학 교육

에서는 다음과 같이 구체적인 목적을 설정할 수 있다.

(1) 수학의 실용적 가치의 구현

수학 교육에서는 일상생활에 필요한 수학적 지식이나 기능을 습득시키는 것을 목적으로 한다. 고대 수학의 발생 자체가 인류 생활의 필요에서 이룩된 것이므로 실용성을 목적으로 삼는 것은 당연한 것이다. 물론 실용성은 개인의 생활 수준이나 직업 등에 따라 다양한 성격을 지니게 되며 내용도 복잡하게 된다.

또한 일상적으로 필요한 지식, 기능이라도 단순히 형식적인 테두리에서 머물지 않고, 수량적인 사고를 할 수 있는 아이디어나 개념을 잘 쓸 수 있도록 해야 한다.

(2) 문화적 · 교양적 가치의 함양

인류는 역사상 과학, 기술, 문학, 예술 등 많은 문화를 창조하여 왔다. 이들은 모두 빛나는 문화적 가치를 지니고 있으며, 인류는 이의 전승 및 발전에 기여해야 한다.

수학도 독특한 문화적 가치를 지닌 학문이다. 유클리드 기하학은 문화적 가치로 인하여 고대에서 근세에 이르기까지 인류에 의해 전승되어 온 것이다. 여기서 우리들이 유념할 것은 수학은 결코 특수한 사람에게만 필요한 것이 아니고, 수학 교육도 훌륭한 수학자를 양산하는 데 목적이 있는 것이 아니라는 점이다. 수학 교육에서는 수학의 필요성을 알고, 즐겁고 재미있는 학습을 통하여 수학의 문화적 · 교양적 가치를 많은 아동들이 알 수 있도록 하는 것이 중요한 일이다.

(3) 도야적 가치의 구현

수학의 학습에서는 그 학습 과정이나 학습의 결과 어떤 정신적인 습관이 형성된다든가 어떤 성격의 능력이 육성된다든가 하는 직접적인 것은 아니지만, 어느 정도 밀접한 관련을 가진 정신적인 가능성이 기대된다. 즉, 논리적으로 사고하는 능력, 형식화하는 능력 등의 전이를 기대하게 된다. 이와 같은 수학 학습의 결과는 형식으로 정착하고, 이 형식은 다른 학습에 파급되기를 바라고 있다.

(4) 창의적 활동의 실천

인간으로서의 보람과 즐거움은 문화의 수용과 함께 어떤 형태로든 문화 활동에 참가하며, 더욱이 새로운 것을 만들어 내는 능력을 발휘할 수 있다는 것이다. 새로운 수학적 지식을 만들어 낸다는 것은 극히 어려운 일이며 학습도 어떤 표준적인 하나의 흐름에 따라서 진행되는 경우가 많지만, 그러한 경우에서도 아동 개개인의 이해의 방법이나 문제를 음미하는 방법 등은 모두 개성적인 것이다.

실제 학습에서 아동들이 다양한 사고 활동을 하고 있는 모습은, 곧 아동의 상상력이나 유연성의 표출이며 창의적 활동을 실천하는 일로 간주된다. 우리는 과정으로서, 그리고 창의적 활동으로서의 수학 학습을 통하여 아동의 창의력을 고무시키는 방향을 모색하여야 한다. 또한 문제해결의 즐거움과 보람을 가지며, 수학의 힘을 자각할 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

02 수학의 특성에서 도출되는 수학 교육의 목표

수학은 가장 순수하고 엄밀한 지적 활동으로 과학의 여왕이라고들 한다. 그러나 평범한 사람들에게는 수학이 개인적인 게임이거나 불확실하고 가치 없는 기호들의 조작 정도로 보일 수 있다. 1989년 루카스(Lucas, J. F.)는 수학에 대한 보통의 이야기들을 다음과 같이 다섯 가지로 열거하고 있다.

가. 수학은 기억해야 할 고립된 사실들과 기법들의 모임이다.

나. 수학적 진리는 절대적이다.

다. 수학은 정확한 과학이다.

라. 수학은 주로 기호적 표상과 조직을 취급하므로, 보통의 쓰기와 말하기 기능들은 수학의 의사소통에 필요하지 않다.

마. 수학은 누군가가 외롭게 수행하는 것이다.

수학이 무엇인가에 대한 이와 같은 고정 관념을 없애려면 수학을 가르치는 방법을 바꾸어야 한다. 우리는 수학을 우리 문화의 통합적인 부분이자 중요한 원동력으로 보고 이를 학생들에게 가르쳐야 한다. 1993년 네스(Ness, H.)는 수학을 다음과 같이 기술하고 있다.

"인간 세상의 질서를 추구하려는 인간의 원초적 충동으로 탄생되었으므로, 수학은 구조와 패턴의 연구를 위하여 영원히 발전하는 언어이다. 물리적 실체에 근거를 두고 거듭 새로워지므로, 수학은 지적 호기심에서 발원하여 예기치 않은 아름답고도 유용한 연결성과 패턴들이 출현하는 추상화와 일반화의 수준으로 발전한다. 수학은 추상적 사고뿐만 아니라 자연 법칙의 보금자리이다. 수학은 순수한 논리이자 창의적인 예술이다."

이러한 수학의 특성은 기초성 · 유용성, 추상성 · 일반성, 기호성 · 형식성, 논리성 · 계통성, 심미성 · 과학성 등으로 요약할 수 있으며, 이들 특성으로부터 다음과 같은 수학 교육의 목표를 도출할 수 있다.

(1) 기초성 · 유용성에서 도출되는 목표

수학은 일상생활을 비롯하여 다른 여러 교과의 기초적 역할을 담당하게 되므로 그 유용성이 매우 높다. 여기서 말하는 유용성은 수학을 이용하는 사람에게 처한 사회적 환경에 따라 수학이 많은 다양성을 지닌다는 것이다. 일반적으로, 기초성과 유용성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 일상생활에 필요한 지식 · 기능의 양성
② 수학 연구를 비롯하여 타 교과의 이해에 필요한 지식 · 기능의 양성
③ 직장이나 전문적 분야에서 쓰이는 지식의 습득
④ 일상생활에서 직면하는 여러 가지 문제해결 능력의 증진

(2) 추상성 · 일반성에서 도출되는 목표

수학의 본질은 그 추상성에 있으며 수학의 학습은 추상화하는 활동이 중심이 된다. 수와 식, 도형 등은 그것이 추상적인 개념으로 취급되기 때문에 단순화되어 있고, 법칙이 발견되며, 논리적으로 다룰 수가 있는 것이다. 추상화에 의하여 구축된 수학은 객관적 · 보편적인 것이므로 광범위하게 구체적인 장에서 활용할 수 있다. 일반적으로, 추상성과 일반성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 구체적 활동이나 조작에 의한 추상화된 개념의 형성과 일반적 원리의 이해
② 자연 현상의 일반적인 원리를 도출하는 능력의 양성
③ 사회 현상을 해석할 수 있는 패러다임의 구성 능력 양성

(3) 기호성 · 형식성에서 도출되는 목표

수학은 추상 작용에 의해 얻어진 개념이나 원리를 기호화하고, 기호에 따라 사고를 이끌어 간다. 그 기호는 사실을 객관적으로 나타낼 수 있으며, 타인에게 정확하게 전달하는 역할을 수행할 수 있다. 수학적 언어는 매우 형식화되어 있는 것이 특징으로 형식적인 취급이 허용되며, 형식적인 논리를 전개할 수 있다. 일반적으로, 기호성과 형식성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 함축성이 큰 언어 체계로서의 수학 기호와 개념의 관계적 이해력 증진
② 활동적 표상, 영상적 표상, 기호적 표상 등 다양한 수학적 의사소통 능력의 향상
③ 객관성과 경제성을 가진 수학 언어의 가치 인식

(4) 논리성 · 계통성에서 도출되는 목표

수학은 논리성과 체계성에 있어서 뛰어난 특징을 지니고 있다. 수학에서는 귀납이나 유추에 의해서 얻어진 사실이라도 그것이 참임을 연역적으로 확인하고, 다시 그것을 체계적으로 정리해 가고 있다. 수학은 논리에 의하여 누적된 하나의 유기적 · 계통적인 학문이라고 할 수 있다.

일반적으로, 논리성과 계통성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 규칙성의 인식과 가설 설정을 위한 귀납적 추론 능력의 증진

② 합리성에 의한 타당한 논증을 위한 연역적 추론 능력의 증진

③ 수학의 공리적 성질의 이해와 이를 토대로 한 논리의 전개 능력 증진

(5) 심미성 · 과학성에서 도출되는 목표

수학을 탐구하는 사람들은 그 아름다움의 본질에 매료되는 경험을 한다. 고대의 건축물이나 생활용품 등에서의 심미성 추구를 위한 황금비의 구현이나 정다면체를 포함한 기하학적 도형에 대한 탐구 등이 그 예이다.

한편, 과학은 모든 사물 간에 존재하는 법칙을 정립하는 것을 생명으로 하며, 그 방법으로써 귀납과 연역이 쓰인다. 수학도 다른 과학과 마찬가지로 합리성과 실증성, 귀납과 연역, 분석과 종합 등에 의하여 연구가 진행된다.

수학을 학습함에 있어서는 이 심미성과 과학성을 소중히 여기는 학습이 필요하다. 일반적으로, 심미성과 과학성에서 도출되는 목표는 다음과 같다.

① 이미 배운 여러 가지 정보를 새로운 문제 상황에 적용하여 해결함으로써 수학의 가치와 소중함을 인식

② 수학적 지식이나 성향의 여러 측면을 통합하는 능력의 양성

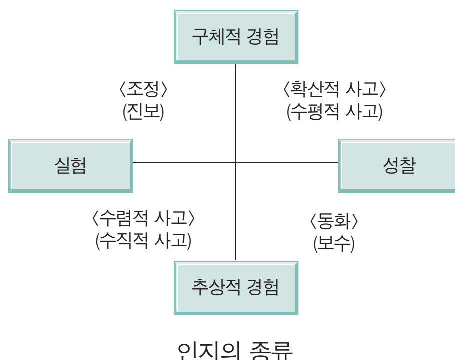
③ 자연 현상이나 사회 현상의 예측과 설명에 의한 수학적 힘의 신장

03 수학적 사고력

수학적 사고는 수학적 개념이나 원리 · 법칙 등이 생성되는 과정에서 작용하는 사고이다. 이때, 여러 가지 유형의 사고를 논할 수 있지만, 직관과 논리가 그 중심이라고 할 수 있다. 직관과 논리는 서로 상반되는 듯한 인식이면서도 상보적인 역할 관계에 있으며, 동시에 일어나는 것은 아니지만 수학적으로 사고하는 경우 긴밀한 연대성이 요구되는 것이다. 직관으로 계획을 세워서 논리로 정리하고 확인하게 되며, 또한 논리적으로 정리된 결과야말로 거기서부터 새로운 직관이 생성되는 것이다. 이러한 양자의 관계에 대한 배려는 뛰어난 교사가 경험적으로 터득하고 있는 수업의 지혜라고 할 수 있는 것이다.

04 수학적 창의력

창의력이란 다음 그림과 같은 인지의 종류 중 확산적 사고의 영역에 해당하는 것으로, 주어진 문제 상황에서 미지의 정보를 이용한 새로운 생각들로 새로운 형태의 문제해결을 발현시키는 것이라 볼 수 있다.



인지의 종류

창의력은 무의식의 세계에서 돌출하는 분수 감정(噴水感情)에 의한 정상 경험(頂上經驗)이며, 정상 경험의 조건들로는 완미 경험(完美經驗), 지적 발견(知的發見), 음악적 감별(音樂的鑑別) 등을 들 수 있다. 월러스(Wallas, G. ; 1858～1932)에 의하면 창의성의 과정은 고육 준비(苦肉準備), 부화(孵化), 섬광(閃光), 확인(確認)의 과정을 거친다.

다음은 디오판토스(Diophantos ; ? 200～? 284)의 묘비에 적혀있는 내용을 요약한 것이다.

'그는 생의 $\frac{1}{6}$ 을 소년으로, $\frac{1}{12}$ 을 청년으로, $\frac{1}{7}$ 을 미혼으로 살았다. 그의 아들은 결혼 후 5년 만에 태어났으며, 그보다 4년 먼저 사망하였다. 아들의 생애는 그의 절반이었다.'

이때, 그가 사망한 나이를 구하고자 하면 사망한 나이를 x로 놓고 다음과 같이 식을 세워 푸는 것이 보통이다.

$\frac{x}{6}$ $\frac{x}{12}$ $\frac{x}{7}$ $+5$ $\frac{x}{2}$ $+4$

x

$$\frac{x}{2}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x+9 \qquad \therefore x=84$$

그런데 보통의 풀이와 다른 독특한 방법에 의한 다음과 같은 풀이가 창의력이 발현된 사례라 볼 수 있다.

첫 번째 단계는, 나이는 일반적으로 0에서 100 사이의 자연수로 표현된다는 가정을 세운다. 따라서 자연수 해를 구하면 된다.

두 번째 단계는, 나타나는 분수 $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}$ 역시 자연수인 아버지의 삶의 기간을 대상으로 하고 있다. 결정적으로 분모 6, 12, 7은 0과 100 사이에서 공배수를 거의 갖지 않으므로 최소공배수를 계산하면 된다는 것이다. 따라서 그의 나이는 84세이다.

이 풀이에서 문제를 해결하기 위한 보다 복잡한 방법은 직관, 경험, 그리고 그 문제의 본질에 함축된 어떤 그럴듯한 가정들에 기초를 두고 있다.

〈참고 자료〉

1. Ernest, P. (1991), The philosophy of mathematics education, The Falmer Press
2. Howson, A. G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981), Curriculum development in mathematics, Cambridge University Press
3. Kilpatrick, J. (1995), Curriculum change locally and globally, in R. P. Hunting, G. E. Fitzsimons, P. C. Clarkson, A. J. Bishop (Eds.), Regional collaboration in mathematics education(pp. 19～29), Monash University
4. Lucas, J. F. (1989), Heuristic thinking and mathematics, Contributed paper, AMS－MAA Mtg. Pheonix, AZ
5. Ness, H. (1993), Mathematics, an integral part of our culture, in A. M. White(Eds.), Essays in humanistic mathematics, Note No. 32, The Mathematical Association of America

Ⅱ. 수학 교수 · 학습 이론 및 방법



1. 수학 교수 · 학습 이론

01 피아제의 지적 발달 이론

1969년 피아제(Piaget, J. ; 1896～1980)는 인간의 인지 발달이 감각 운동기(생후 약 2년까지), 전조작기(약 2~7세), 구체적 조작기(약 7~11세), 그리고 형식적 조작기(약 11세~성인)의 네 단계로 진행된다고 이론화하였다. 이 단계들은 연속적이며, 전 단계를 토대로 구축된다.

구체적 조작기와 형식적 조작기가 중 · 고등학교와 관련성이 매우 높다. 이 두 단계를 구별짓는 기준은 논리적 사고력이다. 논리적 사고력은 비율 논리, 확률 논리, 상관 논리, 변인 통제 논리, 조합 논리 등의 하위 범주들로 구별할 수 있다. 단적으로 표현한다면, 구체적 조작기의 아동의 사고는 실체가, 형식적 조작기의 아동의 사고는 가능성이 지배한다고 볼 수 있다.

피아제 이론에 따르면, 인지 발달은 네 가지 요소들, 즉 물리적 성숙, 경험, 사회적 전수, 그리고 자아 통제의 상호 작용에서 기인한다. 물리적 성숙은 신경계와 내분비선 호르몬계의 유기적 성숙을 말한다. 경험은 대상들에 대한 활동을 수반하는 물리적 경험과, 물리적 활동들의 정신적 조정을 수반하는 논리· 수학적 경험으로 구성된다. 사회적 전수는 사회적 상호 작용뿐만 아니라, 언어적 · 교육적 경험들을 포함한다. 자아 통제는 현존하는 도식이 불충분하여 동화와 조절의 보상 단계들로 이루어질 때, 새로운 정신적 도식을 활동적으로 창출하는 과정이다.

지적 발달에 영향을 미치는 요소들과 아울러 청소년들의 수학 교육의 시사점을 탐색해 보자. 여기서 중요하게 고려해야 할 점은 많은 학생들이 아직도 형식적 조작기에 이르지 못하였다는 것이다. 이를 극복하기 위하여 다

음과 같은 방안을 염두에 두어야 한다.

가. 구체적인 것에서 추상적인 것으로 나아간다.

나. 학생 활동에 기초하여 가르친다.

다. 자아 통제를 통하여 가르친다.

02 딘즈의 수학 학습 이론

딘즈(Dienes)는 수학적 개념들이 발전적인 단계별로 학습된다고 믿는다. 이 단계들은 피아제의 지적 발달 단계들과 다소 유사하다. 그는 수학적 개념들의 교수와 학습에서 다음의 6단계를 설정하고 있다.

가. 자유 놀이 단계

나. 게임 단계

다. 공통성의 탐구 단계

라. 표현 단계

마. 기호화 단계

바. 형식화 단계

딘즈는 'Building up mathematics' 라는 그의 저서에서 그의 수학 교수의 체계를 개념의 교수를 위한 네 가지 일반적인 원리들로 요약하고 있는데, 위의 6단계는 이러한 네 가지 원리들을 정교화한 것이다.

(1) 역동적 원리

예비적 게임, 구조화된 실습용의 게임 그리고 반영적인 유형의 게임 등은 각 유형의 게임이 적절한 때에 도입되기만 하면, 수학적 개념들이 결국에는 구성될 수 있는 필요한 경험들로 제공되어야 함에 틀림없다. 역동적 원리란 장래에 그것으로부터 수학적 개념을 구성해 낼 수 있는 쌓기 나무 놀이나 종이접기 놀이, 또는 게임 등을 경험시켜 두어야 한다는 것이다.

(2) 구성적 원리

게임들의 구조화에서 구성은 언제나 분석에 선행되어야 한다. 분석은 12세까지는 아동들의 학습에서 거의 존재하지 않는 것이다. 따라서 구성의 원리란 수학의 학습에서는 구성이 분석에 선행되어야 한다는 원리인데, 여기에서 구성이란 물체를 만들거나 전체를 파악하는 것이고, 분석이란 물체를 분해하거나 세부를 검토하는 일 또는 어떤 근거를 묻는 것을 말한다. 공간도형의 학습에서 이를 적용하면 공간도형이나 단면을 만드는 것이 선행되고, 이어서 그 성질의 분석이나 성질의 근거를 조사하는 학습이 이루어지는 것이 좋다는 것이다.

(3) 수학적 다양성의 원리

변인들을 포함하는 개념들은 가능한 한 최대의 변인들을 포함하는 경험들에 의하여 학습되어야 한다. 수학적 다양성의 원리는 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것과 변화시킬 수 없는 것이 있는데, 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 다양하게 제시하여야 한다는 것이다. 예를 들어, 평행사변형의 지도에서 변의 길이, 각, 위치 등 가변적인 요소는 여러 가지로 변화시킨 것을 보여 주어야 한다.

(4) 지각적 다양성의 원리 또는 다각적 구현의 원리

아동들이 추상화의 수학적 진수를 축적하도록 유도하기 위해서 뿐만 아니라, 개념 형성에서 개인적 변동에 대하여 가능한 많은 모습들을 허용하기 위하여, 똑같은 개념적 구조는 가능한 한 많은 지각적 동치물들의 형태로 제시되어야 한다. 예를 들어, 평행사변형의 경우 종이, 대나무, 살, 고무줄 등 다양한 재료를 이용하여 만든 것을 보여줄 수 있도록 해야 한다는 것이다.

03 브루너의 인지 경로에 따른 수학 학습 과정

브루너(Bruner, J. S. ; 1915~)는 지식의 구조(structure of knowledge) 이론에서 어떤 영역의 지식도 다음과 같이 활동적(E) · 영상적(I) · 상징적(S) 표상의 세 가지 과정으로 나타낼 수 있다고 하였다.

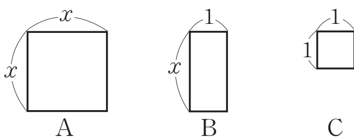
첫째, 학습자에게 제시하는 개념 · 지식 구조를 이해하는 데는 실물 그대로의 제시를 통하여 행동화, 조작화의 신체적 동작으로 표현하는 활동적 표상 양식(enactive mode of representation)의 조작적인 활동이 중심이 된다. 이 과정의 의미는 수학적인 개념이나 원리 · 법칙 등을 구체적인 행동화, 조작화 등의 적절한 운동 반응을 통하여 무엇을 어떻게 하는가를 아는 데에 있다.

둘째, 개념을 충분히 정의하지 않고도 영상을 통해서 그림이나 모형으로 지식을 이해하는 영상적 표상 양식(iconic mode of representation)은 내적인 심상에 근거를 두고 시각적 또는 다른 감각적 조작에 의하여 지식을 그림이나 도식으로 표현하는 것에 그 의미가 있다.
셋째, 법칙과 원리에 의해 지배되는 상징적 체제에서 배출된 논리적 명제에 의한 기호나 문자식으로 지식을 이해하는 상징적 표상 양식(symbolic mode of representation)은 융통성 있는 사고 체계에 근거를 두고 언어나 문자, 기호 등을 사용하여 지식을 표현하는 것으로, 고차적인 문제해결 능력의 기초가 된다.
학습 내용을 전달하는 의사소통원을 도식화하면 다음과 같다.

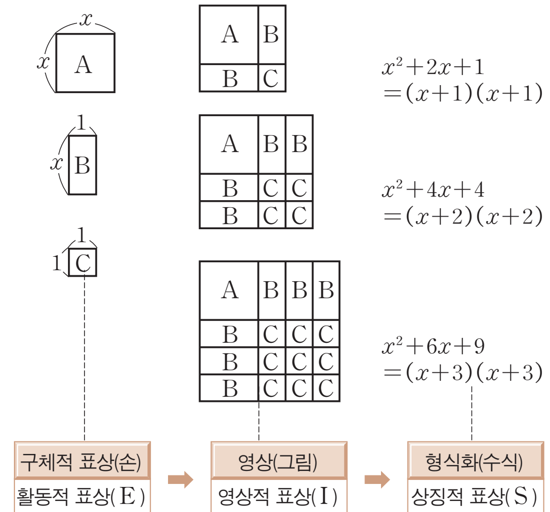
여러 가지 표상

	양식	구체적 기호	형태적 기호	상징적 기호	
구체	대상	실물	그림	용어	추상
		모형	도표	기호	
		사진	벤 다이어그램	수	
		구체물	수직선	문자	

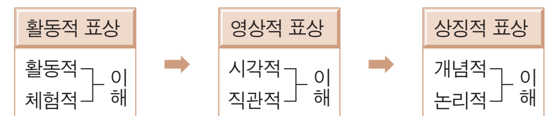
브루너는 인지 경로에 관한 EIS 이론의 바탕이 되고 있는 '2차원의 완전제곱'에 관한 수학 학습 지도의 예를 다음과 같이 들고 있다.
학습 내용은 2차원의 완전제곱형의 인수분해이다. 학습의 흐름은 주어진 자료를 조작, 구성해 보는 것에서 시작하여 자기가 구성한 수학적 원리를 영상적으로 파악하도록 하고, 나아가서 수식으로 표현하게 되어 있다.
다음 그림에서 A는 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양의 나무도막으로서 x곱하기 x를 'x네모'로, B는 가로 1, 세로 x인 직사각형 모양의 나무도막으로서 'x막대'로, C는 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 나무도막으로서 1 곱하기 1의 나무도막을 '1네모'로 각각 부르기로 한다.



아동들에게 A, B, C를 여러 개씩 나누어 주고, 그것으로 놀 기회를 충분히 준 다음 'x네모'보다 큰 정사각형 모양을 만들어 보게 하자. 아동들은 큰 어려움 없이 다음과 같은 모양을 만들었다고 한다.



이처럼 브루너는 인지 경로 학습을 활동적 표상 → 영상적 표상 → 상징적 표상의 단계적인 학습을 요구하고 있다. 첫째 단계인 활동적 표상에서는 주로 구체물 조작에 의한 학습을 하고, 둘째 단계인 영상적 표상에서는 구체물 조작에 의해서 습득된 지식을 그림이나 도식으로 나타내어 보고, 마지막 단계인 상징적 표상에서는 영상으로 얻은 지식을 문자, 기호, 숫자 등을 사용하여 형식화하고, 이를 추상적인 수식으로 표현해 보게 하는 것을 인지 경로에 따르는 학습이라고 한다.



04 스켐프의 관계적 이해와 도구적 이해

스켐프(Skemp, R. ; 1919~1995)는 영국의 수학 교육학자로서 수학 학습 심리와 수학 교육 방법론에 관한 최대의 연구 업적을 남겼다. 스켐프는 영국의 옥스퍼드 대학에서 순수 수학을 전공하였다. 대학을 졸

업한 뒤에 수학 교육 연구에 관심을 가지고 수학을 재미있게 지도하는 방법을 연구·개발하기 위하여 대학 교수직도 사양하고 초·중등학교 교사 생활을 경험하였다. 스켐프는 훌륭한 이론은 현장에서 나온다는 신념에 따라 교사 생활을 하면서도 다시 옥스퍼드, 맨체스터, 워릭 대학에서 '심리학과 수학', '교육 심리학', '아동 심리학', '인지 발달 심리학', '수학 학습 심리학', '초등 수학 교수법' 등의 연구를 하여 수학 교수·학습 이론을 체계화하는 업적을 남겼다.

관계적 이해(relational understanding)와 도구적 이해(instrumental understanding)라는 용어는 스켐프가 1976년 'Mathematics Teaching' 이라는 학술지의 논문 발표에서 처음으로 알려지기 시작하면서부터 새로운 수학 교육 용어의 하나로 자리잡게 되었다. 스켐프는 이해를 새로운 상황을 이미 알고 있는 인지도식(scheme)과 동화(assimilation)시키는 것으로 설명하면서, 이해를 하게 되면 목표의 획득, 다른 사람과의 상호 협력, 창조적인 활동을 더 잘 할 수 있게 된다고 하였다.

관계적 이해란, 문제 해결의 방법과 이유를, 무엇을 왜 하는지를 알고 있으면서 보다 일반적인 수학적인 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 상태를 말하고, 도구적 이해는 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 되느냐를 알지 못한 채 기억된 능력을 문제 해결에 적용하는 상태를 말한다.

예를 들면, 삼각형의 넓이를 구하는 문제에서, 첫째 날은 직각삼각형이 그려진 모눈종이를 등적변형(等積變形)시켜 직사각형으로 만들고 이들의 관계에서 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 만들어 내는 수업을 한다. 둘째 날은 만들어 낸 공식을 이용하여 실제로 삼각형의 넓이를 구해 보게 한다.

이러한 수업 과정에서 어떤 학생이 첫째 날은 결석하고, 둘째 날은 출석했다고 가정하자. 첫째 날 결석한 학생은 평소에 곱셈과 나눗셈 학습은 잘 하고 있다고 한다. 둘째 날 교사가 첫째 날 학습한 삼각형의 넓이를 구하는 공식 '(밑변)×(높이)÷2' 를 상기시키고 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 제시했을 때, 첫째 날 결석한 학생도 곱셈과 나눗셈을 잘 할 수 있기 때문에 공식에 수를 대입하여 삼각형의 넓이를 어려움 없이 쉽게 구할 것이다.

이 경우, 결석한 학생은 삼각형의 넓이를 구하는 학습에서 도구적 이해는 하고 있지만 관계적 이해는 하지 못했다고 볼 수 있다.

이와 같이, 결석한 학생이 주어진 공식을 적용하여 정답만을 찾아내고 삼각형의 넓이 공식을 만들어 내는 과정을 모르는 경우를 가리켜, 스켐프는 도구적 이해를 통한 삼각형의 넓이 구하는 학습을 했다고 한다.

스켐프는 최근까지도 도구적 이해를 '논리없는 규칙'으로 보고 이해로 간주하지 않았으나, 때에 따라서는 도구적 이해가 필요하다는 점을 그의 저서에서 시사하고 있다. 학생들은 도구적 이해에 의한 학습을 원하지만 관계적 이해를 목표로 하는 교사에게는 도구적 이해를 반대한다. 그러나 인지 수준상 관계적 이해가 어려운 경우에는 우선 도구적 이해로 학습한 후에 적당한 시기에 관계적 이해에 의한 학습이 요구된다.



2. 창의적 문제 해결을 위한 교수 · 학습 방법

01 문제란 무엇인가?

1983년 렌츠너(Lenchner)는 "문제란 개인이나 집단이 직면하여 반드시 해결을 해야 하지만, 그 해결의 분명한 경로가 보이지 않는 상황을 말한다."고 하였다. 문제와 비슷한 용어로 질문(question), 연습문제(exercise), 문제(problem) 등이 있다. 질문은 단순한 회상과 기억에 의하여 해결이 가능한 상황이며, 연습 문제는 이미 학습된 기능이나 알고리즘의 강화를 위한 반복 연습을 요하는 상황이며, 문제는 해결을 위하여 이미 학습된 지식의 분석과 종합을 요하는 상황이라고 볼 수 있다. 문제란 수용, 장벽, 탐구의 세 가지 조건을 만족하여야 한다.

02 폴리아의 문제해결 4단계

요즘 강조되고 있는 문제해결(problem solving)은 듀이(Dewey, J.; 1859~1952)의 진보주의 철학에서 그 근거를 찾을 수 있으며, 형태주의와 폴리아(Polya)의 영향을 받아 1980년대에 들어서면서 NCTM의 권고로 부활된 것으로 볼 수 있다. 이제는 실용성을 근거로 하여, 정형화된 문제보다는 수학적 지식을 이용하여 해결할 수 있는 실생활 문제의 상황을 강조하기 시작한 것이다. 문제해결을 위한 첫 단계는 문제의 이해로, 이를 위해서는 통찰에 의한 문제의 구조를 파악하는 것이 중요하다. 따라서 개념과 원리의 이해는 지속적으로 강조되어 왔다고 볼 수 있다. 최근에는 실생활 문제의 해결 기능을 증진시키기 위하여 통찰에 의한 문제의 이해뿐만 아니라 연습에 의한 암송 전략을 강조하는 정보 처리 이론(IPS Theory)이 각광을 받고 있기도 하다. 폴리아의 문제 해결 4단계는 다음과 같다.



03 창의적 문제해결 전략

렌츠너는 학교 수학 수업에서 창의적 문제해결력을 높이기 위해 다음과 같은 문제해결 전략을 중점적으로 지도하여야 한다고 주장한다.

가. 그림이나 도표 그리기
나. 규칙성 찾기
다. 조직화 된 목록 만들기
라. 표 만들기
마. 문제를 단순화하기
바. 시행 착오
사. 실험하기
아. 문제의 실연
자. 거꾸로 풀기
차. 식 세우기
카. 연역적 추론의 이용
타. 고정 관념 바꾸기

예를 들어, 다음과 같은 '하노이의 탑' 문제의 해결 과정에서 위의 열두 가지 문제해결 전략 중 3개의 문제해결 전략이 이용된다.

문제 상황 | 다음 그림과 같이 세 개의 나무 막대기와 그 막대기에 꼭 맞게 끼울 수 있도록 가운데에 구멍이 나 있는, n개의 서로 다른 크기의 원판으로 이루어진 장난감이 있다. 처음에는 한 막대기에 모든 원판이 걸려 있되, 가장 작은 원판이 제일 위에 걸려 있고 아래로 갈수록 점점 큰 원판들이 걸려 있다.



원판을 옮길때 한 번에 한 개씩만 한 막대기에서 다른 막대기로 옮길 수 있고, 작은 원판 위에는 큰 원판을 올려 놓을 수 없다.

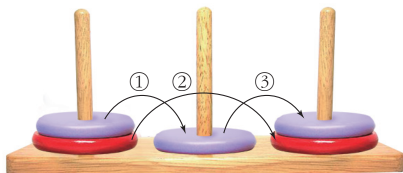
목표 | 이러한 규칙에 따라 처음의 막대기 위에 있는 모든 원판을 다른 막대기에 옮겨야 한다.

문제해결 전략 |

① n이 1일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
② n이 2일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
③ n이 3일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
④ n이 4일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?
(문제를 단순화하기)
⑤ 어떤 규칙성을 발견할 수 있는가?
(규칙성 찾기)
⑥ 수학적 귀납법에 의하여 이러한 일은 (2^n-1)회의 시행으로 수행할 수 있음을 증명하여라. (거꾸로 풀기)

활동 및 풀이 |

① n이 1일 때: 1 ② n이 2일 때: 3



③ n이 3일 때: 7 ④ n이 4일 때: 15

⑤ 3개인 경우 먼저 작은 것 2개를 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 2개를 옮긴다.
즉, $3+1+3=7$이다.
마찬가지로, 4개인 경우에도 위의 3개를 먼저 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 3개를 옮겨야 하므로 $7+1+7=15$이다.

⑥ $n=k$일 때: (2^k-1)회의 시행이 필요하다면,
$n=(k+1)$일 때는 ⑤에 의하여 먼저 k개를 옮긴 다음 한 개를 옮기고 다시 k개를 옮겨야 하므로 $(2^k-1)+1+(2^k-1)=2^{k+1}-1$이고 따라서 모든 자연수에 대하여 성립한다.

〈참고 자료〉

1. Lenchner, G. (1983), Creative Problem Solving in school Mathematics, Houghton Mifflin Company
2. Piaget, J., Inhelder, B. (1969), The Psychology of the Child, Basic Books, Inc
3. Bruner, J. S. (1964), The course of cognitive growth, American Psychologist, 19, pp. 1~15
4. Skemp, R. R. (1976), Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics Teaching, No. 77, pp. 20~26

Ⅲ. 수학 교구 및 기자재의 활용

수학의 학습은 계통적으로 이루어진다고 한다. 그 원리는 생물학자인 헤켈이 주장한 “개체 발생은 계통 발생의 발달 단계를 되풀이한다.”라는 표현에 근거를 두고 있다. 이는 개체는 집단의 발전을 되풀이한다는 것을 의미하는데, 이를 수학의 학습에 적용하면 대개 오랜 세월에 걸쳐 그 과목이 발전한 순서로 그 과목을 배운다는 것이다. 이를테면, 기하학 분야는 아기들이 물리적인 형태를 인지하고 모양과 크기를 비교할 수 있는 능력, 즉 단순한 관찰에 기원한 잠재적 기하학(subconscious geometry)에서 출발한다. 그 후, 컴퍼스, 자, 각도기, 가위, 풀 등을 가지고 놀거나 실험을 하면서 여러 기하학적 사실을 상당히 이끌어 내는 과학적(또는 실험적) 기하학(scientific or experimental geometry)으로 발전한 다음 보다 높은 수준인 논증적 기하학(demonstrative geometry)으로 발전한다.
그런데 고등학교 교육과정에서 과학적 기하학 수준의 학습이 충분하게 이루어져야 하는데, 이런 면이 부족하다. 다른 수학 분야에서도 비슷한 실정이다.
따라서 이번 2006년 개정 교육과정에서는 이를 보완하고자 수학의 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 기술 공학적 교구(계산기, 컴퓨터, 인터넷 등)를 적극 활용할 것을 권장하고 있다.
수학과 교수 · 학습에서 다양한 구체적 조작물 및 학습 기자재를 활용하면 개념, 원리, 법칙 등의 이해를 돕기에 효과적이고, 흥미를 유발하여 학생 중심으로 탐구하고, 역동적인 학습을 기대할 수 있다.



1. 계산기의 활용

계산기를 수학 교육에 활용하는 방법으로는 다음의 세 가지를 생각할 수 있다.

첫째, 실생활 문제 등과 같은 문제해결을 위해 복잡한 계산을 해야 할 경우, 계산기를 사용함으로써 정확한 값을 신속하게 구할 수 있다.

둘째, 계산기를 문제해결을 위한 소재로 활용할 수 있다. 예를 들면, 그래픽 계산기로 삼차함수의 그래프를 그리려고 할 때, 그래프의 특성과 개형을 미리 예측해 보고 화면의 크기를 정한 후 실제로 그래프를 그려서 그 예측을 확인해 보게 할 수 있다.

셋째, 수학 학습을 위한 보조 자료로 활용할 수 있다. 과학용 계산기는 거듭제곱근의 값, 삼각비의 값, 지수함수의 값, 로그의 값 등을 내장하고 있어서 이들을 학습할 때 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다. 그래픽 계산기는 함수의 그래프에 관한 기능뿐만 아니라, 행렬과 행렬식의 계산, 문자식의 인수분해와 전개, 통계 처리 기능, 미분과 적분의 계산 등을 포함하고 있어서 수학 지도의 중요한 보조 자료로 활용할 수 있다.

계산기는 일반용 계산기, 공학용 계산기, 그래픽 계산기 등 그 형태와 기능이 다양하고, 숫자판, 표시창, 전자 기억 소자로 구성되어 있다.

① 일반용 계산기: 사칙연산이 가능한 계산기

② 공학용 계산기: 삼각비와 지수 · 로그의 계산, 통계 처리까지 가능한 계산기

③ 그래픽 계산기: 공학용 계산기의 기능에 함수의 그래프까지 그릴 수 있는 계산기



2. 컴퓨터의 활용

컴퓨터를 활용하는 것은 수학 교수 · 학습 과정의 여러 어려움을 극복하기 위한 대안으로 생각되어, 기존 수학 개념 지도의 어려움을 경감할 수 있는 방안에 대한 연구로 진행되고 있다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히, 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 또, 산술 교육은 종래의 계산 기능 위주에서 사고력으로 옮겨갈 수 있게 되었으며, 학생들의 수학 학습을 돕기 위한 많은 소프트웨어가 개발되고 있다.

01 수학 수업에서의 컴퓨터 활용의 장점

(1) 그래픽과 애니메이션

학습 내용을 시각적으로 전달하여 학습자가 학습 내용을 쉽게 받아들일 수 있고, 학생들의 호기심을 자극하여 학습 효과를 높일 수 있다.

(2) 시뮬레이션

시간적, 공간적 제약으로 실제 경험이 불가능한 경우에 유사한 상황을 제시하여 이해를 돕고 학습 효과를 크게 높인다.

(3) 계산 능력

복잡한 계산 능력이나 자료 정리를 신속하고 정확하게 처리하여 탐구 학습에 많은 시간을 할애할 수 있다.

02 수학 수업에 활용할 수 있는 프로그램

컴퓨터가 발달함에 따라 수학 교재에 적용할 수 있는 다양한 소프트웨어가 제공되고 있다.

(1) Mathematica

울프람(Wolfram, S.)은 일리노이 대학의 복합 시스템 연구 센터에서 수학 문제라면 무엇이든지 해결할 수 있는 소프트웨어 개발을 시작했으며, 그 산물이 바로 Mathematica이다.

Mathematica의 가장 큰 특징은 첫째로 기호 계산 능력이다. 대부분의 프로그램은 수치 계산(numerical calculation)은 할 수 있지만, 기호 계산은 불가능하다. 하지만 Mathematica는 수치와 기호 계산 모두가 가능한 프로그램이다.

둘째로 Mathematica의 명령어는 일반 수학의 명령어와 기호가 흡사하여, 수학 문제의 수리적 과정을 대치하면서, 프로그램에 쉽게 접근할 수 있다.

셋째로 Word Processor로 사용할 수 있으며, html로 출력할 수 있다.

넷째로 Mathematica는 그래픽 처리와 풍부한 함수를 가지며, Mathematica의 부프로그램과의 호환 기능이 탁월하다.

(2) GSP(The Geometer's Sketch Pad)

GSP는 유클리드 기하의 도형을 구현할 수 있는 작도 프로그램의 일환으로, 기존의 정적이고 고정된 도형에서 동적이고 움직이는 도형을 관찰함으로써 기하학적 관계를 보다 이해하기 쉽게 해 준다. 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 기본적인 작도 기능을 한번에 수행할 수 있고, 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한번에 가능하다.

GSP는 애니메이션과 드래그(Drag)를 사용하면 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있고, 또한 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 이로부터 도형의 성질에 대한 확실한 개념을 얻을 수 있다.

또한, 도형의 여러 요소의 색상 처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 도형의 이름을 붙여 주거나 주석을 다는 등의 여러 가지 표현도 손쉽게 처리할 수 있다.

따라서 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습 욕구를 더욱 유발할 수 있어 효과적이다.

(3) C. a. R.

C. a. R.는 GSP와 마찬가지로 사용법이 간단하여 중 · 고등학생이 다루기 쉬운 프로그램으로 칠판이나 종이 위에서와는 달리 도형을 조작할 수 있다. 즉, 마우스로 도형을 이동시키거나 변형할 수 있다.

이때, 선분의 끝점을 움직이면 그 선분의 수직이등분선이 그에 따라 자동으로 이동하는 등 도형들 사이의 관계가 유지된다. 그러므로 칠판이나 종이에서 불가능한 '실험'이라든가 '시행 착오를 통한 문제해결'이라는 개념을 기하 수업에 도입함으로써 학생들이 도형의 성질을 직관적으로 파악하는 데 큰 도움을 얻을 수 있다. 실제로 이 프로그램을 가지고 수업을 해 보면, 앞서는 학생들이 수업 내용 밖의 발전적인 내용을 스스로 발견하는 경우나, 평소 뒤처지는 학생들이 흥미를 가지고 수업에 참여하는 경우를 많이 볼 수 있다.

또한, '과제' 기능을 이용하면 학생들이 스스로 문제를 풀고 결과를 확인할 수 있어 편리하다.

특히, 하이퍼텍스트(html) 파일을 작성하여 웹 상에서 활용하는 것이 편리하다.

더욱이 이 프로그램은 GPL 라이센스를 따르는 무료 소프트웨어로 비용이 전혀 들지 않는다.

(4) 한글 오피스 – 엑셀

엑셀은 MS Office의 5가지 프로그램 중 하나이다. 그 중 엑셀(excel)은 단순한 표 계산부터 회계, 재무 관리를 위한 프로그램이다.

엑셀의 가장 큰 특징은 자동 계산 기능이다.

엑셀의 자동 계산은 200여 가지에 이르는 '함수'에 의하여 이루어진다.

따라서 사용자가 숫자만 치면 합계, 비율, 평균, 순위 등의 모든 결과는 엑셀이 알아서 계산한다. 또한, 200개가 넘는 함수 중에서 더하기, 빼기, 나누기, 곱하기의 4가지 함수의 사용법을 익히면 거의 모든 계산을 할 수 있고 추가로 if 함수의 사용법을 알게 되면 엑셀을 더욱 유용하게 이용할 수 있다.

(5) 그래프 마법사

사용자가 입력한 함수식을 그래프로 나타내어 주는 프로그램으로 중 · 고등학교 수학 교과 과정에서 다루어지는 모든 내용의 그래프에 대한 표현이 가능하다.

(6) 그 밖의 프로그램

① Poly : 정다면체와 준정다면체를 포함한 147개의 볼록 다면체를 자유롭게 회전시키면서 관찰할 수 있고, 입체에서 평면 전개도를 인쇄할 수 있는 프로그램이다.

② Wingeom: 2차원 도형, 3차원 다면체를 조작할 수 있는 프로그램이다.
③ TESS: 변환과 다각형의 각의 크기를 지도할 때 사용할 수 있는 프로그램이다.
④ Equation grapher: 함수의 그래프를 그리고 해석하는 프로그램이다.
⑤ GrafEq: 정함수, 음함수, 매개변수함수, 극좌표 형식의 함수 등 어떤 함수든지 그래프를 그릴 수 있고, 부등식의 영역을 표시할 수 있는 프로그램이다. 여러 개의 함수의 그래프를 동시에 그릴 수 있고, 줌(zoom) 기능도 가지고 있다.
⑥ WinPlot: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.
⑦ Graphmatica: 다양한 형태의 곡선, 곡면을 그릴 수 있는 프로그램이다.
⑧ Winstat: 변량에 대한 그래프, 히스토그램, 확률분포 곡선 등을 그려 주는 통계 프로그램이다.



3. 웹 사이트(web site)의 활용 및 매개 커뮤니케이션의 활용

개인용 컴퓨터가 일반화되고 네트워크 시스템이 구축됨에 따라, 인터넷을 활용하여 자신이 가진 정보를 공유하고 지속적으로 확대시켜 나갈 수 있게 되었다.
이에 따라 수학 교수 · 학습에 필요한 많은 정보를 활용할 수 있게 되었다.

01 웹 사이트 활용 학습

인터넷을 이용하여 여러 정보를 모으고 활용하는 것이 가능하다. 또한, 문제은행식으로 구성된 사이트에서 수학 문제를 풀어 보고 그 결과를 알아볼 수 있다.
한편, 수학사나 수학자 등을 조사하여 학습에 활용할 수 있다.

02 매개 커뮤니케이션을 활용한 학습

메일을 이용하여 교사나 친구 등 여러 사람에게 학습 과제에 대한 도움을 받고, 과제를 제출할 수 있다. 또한, 탐구 학습에서 친구들과 대화방을 만들어 문제 해결 과정에 대하여 서로 의견을 나누는 등 여러 가지로 활용할 수 있다.



4. 수학 교구

01 산가지

우리나라에서는 조선 말까지 산가지를 이용하여 계산하였다. 산가지는 대나무 가지를 세모꼴 막대 모양으로 만들어 이용한 계산 도구로, 현재 국립 민속 박물관에 남아 있는 산가지의 길이는 약 15 cm이다. 산가지를 늘어놓을 때는 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자를 놓을 때마다 세로, 가로로 번갈아 늘어놓았으며, 음수를 나타낼 때는 산가지 위에 어슷하게 산가지를 한 개 더 올려 놓았다고 한다.
또, 이와 비슷한 산목이란 것을 이용하여 이차방정식까지도 풀었다고 한다.

02 계산패

곱셈을 할 때 사용했던 셈기구이다.

03 기하판 (geometric board)

다양한 도형의 넓이를 구하게 하여 창의력을 신장할 수 있는 수학 교구이다.

04 대수판 또는 대수막대(algebraic board 또는 algeblock)

대수판은 10진막대 또는 대수막대 등 여러 가지로 활용된다.
대수막대는 최근에 소개된 교구로 변수의 개념을 직접 손으로 만져 볼 수 있는 모델로 만들었다는 데 그 의의가 있다고 하겠다. 이 교구에는 x, y, x^2, xy, x^2y, xy^2,

x^3 등을 나타내는 대수막대들이 있고, 각종 계산의 모형을 만드는데 보조 역할을 하는 여러 가지 판들이 있다. 대수막대를 사용하면 정수의 연산과 변수의 연산을 직접 막대를 가지고 확인할 수 있으며, 다항식의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 심지어 간단한 방정식의 계산도 할 수 있다. 대수막대는 두꺼운 종이로 간단히 만들 수 있다.

05 삼항식

대수막대의 변형된 형태로 8개의 조각으로 정육면체를 만드는 퍼즐 형태의 교구로, 세제곱의 전개를 이해하는 데 도움이 되는 교구이다.

06 그림자 퍼즐(실루엣 퍼즐)

도형을 여러 조각으로 나눈 몇 개의 조각을 가지고 여러 가지 모양을 만드는 퍼즐을 그림자 퍼즐이라고 한다.

중국 고대의 탱그램(tangram) 게임에 기초한 것으로 우리나라에서는 칠교 놀이로 널리 알려져 있다. 이것을 발전시킨 것으로 T자, F자, 악마의 퍼즐이라고 불리는 kobold 등이 소개되어 있다.

〈참고 자료〉

1. 김원종(1993), 인공 지능을 활용한 수학 교육의 코스웨어, 한국 수학 교육 학회
2. 류희찬(1997), 수학 교육에서의 컴퓨터 활용: 현황과 과제, 청람 수학 교육



5. 수학과 추천 사이트

01 수학 학습 관련 사이트

- http://www.kms.or.kr/

  대한수학회 홈페이지로 수학 용어를 검색할 수 있고, 한국수학올림피아드에 관한 소식 등 다양한 소식이 소개되어 있다.

- http://www.tmath.or.kr/

  사단법인 전국수학교사모임 홈페이지로 수학과 수학 교육에 대한 다양한 정보가 소개되어 있다.

- http://mathforum.org/

  The Math Forum 홈페이지이다.

  여러 수학 문제와 퍼즐 수학 관련 소식 등이 소개되어 있다.

- http://primes.utm.edu/

  소수에 대한 여러 가지를 설명한 사이트이다.

- http://www.mathnet.or.kr/

  한국과학기술원 수리과학연구정보센터 홈페이지로 수학과 관련된 사이트를 잘 정리하여 소개하였고 최근 수학계 연구 동향 및 학술 정보, 수학자 정보 등을 제공하며 수학 경시 대회, 수학 교육 관련 내용 등이 소개되어 있다.

- http://math.exeter.edu/

  Wingeom, Winplot 등의 수학 관련 프로그램을 내려 받을 수 있다.

- http://www.peda.com/

  GrafEq, Poly, Poly Pro, Tess 등의 프로그램을 내려 받을 수 있다.

02 퍼즐 관련 사이트

- http://www.cimt.plymouth.ac.uk/

  엑서터(Exeter) 대학의 Centre for Innovation in Mathematics Teaching에서 만든 사이트로 다양한 레크레이션 수학을 소개하고 있다.

- http://user.chollian.net/~badang25/bdh03.htm/

  칠교 놀이, 소마큐브, 펜토미노, 도형 조각 퍼즐 등 다양한 퍼즐이 소개되어 있다.

• http://www.stetson.edu/~efriedma/
스테츤(Stetson) 대학에서 수학과 컴퓨터학을 담당하는 교수인 Erich Friedman이 만든 사이트로 재미있는 퍼즐이 많이 소개되어 있다. 더욱이 창의적인 사고를 하게 하는 문제가 많이 소개되어 있다.

03 계산기 관련 사이트

• http://matrix.skku.ac.kr/sglee/
성균관 대학교 이상구 교수의 홈페이지로 그가 만든 공학용 계산기와 그래픽 계산기를 컴퓨터에서 직접 사용할 수 있다.

Ⅳ. 2006년 개정 수학과 교육과정의 해설



1. 수학과 교육과정 개정의 배경

01 개정의 필요성

21세기 지식 기반 사회에 적합한 인재는 숙련된 단순 기능인보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간이라고 할 수 있다. 이를 위하여 초·중등학교 수학과에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 추측하며 논리적으로 추론하는 수학적 사고력, 수학을 이용하여 정보를 처리하고 의사소통을 하는 능력, 수학적 지식과 방법을 활용하여 실생활이나 다양한 분야의 문제를 창의적으로 해결하는 문제해결력, 수학의 유용성과 가치를 이해하고 활용하는 능력, 수학에 대한 흥미와 자신감 등을 기르는 것이 필요하다.

1950년대 말 미국에서 수학 교육 현대화 운동이 시작된 이후로 세계 각국의 초·중등학교 수학과 교육과정에는 많은 변화가 있었다. 이 운동의 영향으로 초·중등학교 수학과 교육에 집합, 대응, 행렬 등과 같은 현대적인 수학 내용이 도입되었고, 정확한 수학적 용어와 기호 사용, 엄밀한 증명 등이 강조되었다. 1970년대에는 수학 교육 현대화 운동에 대한 비판과 반성이 나타나면서 '기본으로 돌아가기(back to basics)' 운동이 전개되었고, 1980년대에는 전 세계적으로 문제해결력을 강조하였으며, 1990년대 이후에는 문제해결력을 비롯하여 여러 고등 사고 능력을 포괄하는 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다.

우리나라 초·중등학교 수학과 교육과정도 이러한 세계적인 흐름의 영향을 받아 점진적으로 변화되어 왔다. 1973년에 고시된 제3차 수학과 교육과정은 수학 교육의 현대화 운동의 영향을 받아 집합 언어를 기초로 하

는 현대적인 수학 내용을 도입하였고, 엄밀한 수학적 증명을 강조하였다. 그러나 1981년에 고시된 제4차 수학과 교육과정부터는 학생 수준을 고려하여 수학적 엄밀성에 대한 강조를 점진적으로 완화시키고 수학 학습 내용을 감축하는 한편 수학적 문제해결력 신장을 강조해왔다. 1997년 말에 고시된 제7차 수학과 교육과정은 수학적 힘의 신장을 강조하는 수학 교육의 세계적 동향 및 학습자의 자율과 창의성에 바탕을 둔 소위 학생 중심 교육과정이라는 총론의 기본 정신을 반영하여 구성되었다.

제7차 수학과 교육과정은 학교 교육을 공급자 중심에서 수요자, 즉 학생 중심으로 바라보도록 그 관점을 전환시켰고 학생들이 자신의 진로, 적성, 흥미, 필요에 맞게 과목을 선택하여 이수할 수 있도록 학생 선택의 자율권을 확대하였다는 점에서 긍정적 기여를 하였지만, 학교 현장에 적용 · 운영되는 과정에서 문제점을 드러내었고, 이에 대한 개선 요구가 줄곧 제기되었다. 또한 제7차 수학과 교육과정에서는 수학 교육의 세계적인 흐름을 반영하여 수학적 힘의 신장을 강조하였지만 다소 미흡한 점이 있었고, 현대 사회의 빠른 변화에 적응하고 미래 사회에 더욱 적합한 수학 교육을 요청하는 국가 · 사회적 요구가 많았다.

제7차 수학과 교육과정에 대한 개선 요구 사항을 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

(1) 단계형 수준별 교육과정의 개선 필요

제7차 교육과정에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 국민 공통 기본 교육 기간에는 학생의 능력과 수준에 맞는 수학 수업을 위하여 수학 교과는 단계형 수준별 교육과정을 편성, 운영하도록 하였다. 단계형 수준별 교육과정에 따르면 학생들은 학년에 관계없이 자신의 능력과 수준에 맞는 단계의 수학 수업을 듣도록 하고, 매 단계를 마칠 때마다 해당 단계 도달 여부를 확인하는 평가를 실시하여 그 단계의 수준에 도달하지 못했으면 그 단계를 재이수하거나 특별 보충과정을 이수해야 한다. 모든 학생들이 자신의 능력과 수준에 적합한 수학 교육을 받을 수 있도록 하는 것은 우리나라뿐만 아니라 세계적으로 강조되는 현상이다. 그러나 우리나라 학교 현실을 고려할 때 단계형 수준별 교육과정은 개선될 필요가 있었다.

(2) 교육 내용의 적정화 필요

제7차 교육과정에서는 이전에 비하여 수학 교과의 내용을 30 % 감축하도록 하였다. 그러나 제7차 교육과정에서 수학과 수업 시간이 축소됨에 따라 학습량 감축이 실질적인 효과를 거두지 못하였다(신성균 외, 2005).

또한 수준별 교육을 강화하기 위하여 제7차 교육과정에서는 국어, 사회, 수학, 과학, 영어 교과의 경우, 교육과정에 기본 과정과 함께 심화 과정도 함께 제시하도록 하였다. 이러한 심화 과정의 내용이 수학 교과서에 기본 내용과 함께 제시되자, 교과서에 나오는 내용은 모두 지도해 달라는 학생과 학부모의 요구에 따라 각 학교에서는 학생의 수준에 관계없이 모든 학생들에게 기본 과정의 수학 내용뿐만 아니라 심화 과정의 수학 내용도 모두 지도하게 되면서 학습량이 과다하고, 학습 수준이 지나치게 높다는 비판을 받게 되었다(박선화 외, 2005).

한편, 무리하게 수학 교과의 내용을 감축하는 과정에서 일부 학습 주제가 학년 간, 교과 간 연계성이 떨어지고, 내용 영역 구분 방식에 따라 연관된 수학 내용을 분리하여 지도하도록 함으로써 학습 효과가 떨어지는 문제도 발생하였다(신성균외, 2005).

(3) 수학적 능력 신장의 강조 필요

1990년대 이후로 학교 수학 교육에서 강조하는 세계적인 흐름의 하나가 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하는 것이다. 제7차 수학과 교육과정도 이러한 세계적 흐름을 반영하고는 있지만 다소 미흡하였다.

(4) 수학에 대한 정의적 태도 개선 필요

그동안 수학과 교수 · 학습에서는 문제해결력 신장과 같은 인지적 측면을 주로 강조해왔다. 그러나 학

생들의 수학에 대한 정의적 태도가 개선되지 않으면 학생들의 수학적 능력의 향상을 기대하기 어렵고, 점차 수학 학습을 기피하거나 수학에 대한 두려움이나 혐오감을 가지는 학생들이 증가하게 되어, 학생 개인의 경쟁력뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력도 저하될 우려가 있다. 특히, 최근에 실시한 국제 학업 성취도 비교 연구 결과를 살펴보면, 우리나라 학생들의 수학 성취도는 최상위권이지만, 수학에 대한 자신감과 수학의 가치에 대한 인식이 상대적으로 매우 낮고, 초등학교에서 중학교로 올라갈수록 수학 학습에 대한 흥미도가 점점 낮아지는 등 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나고 있어, 이를 개선하려는 노력을 적극적으로 기울일 필요가 있다(이미경 외, 2004a).

02 개정의 기본 방향

2007년에 개정 고시된 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향은 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지, 단위 학교별 교육과정 편성 · 운영의 자율권 확대, 국가 · 사회적 요구사항의 반영, 고등학교 선택 중심 교육과정 개선, 교과별 교육내용의 적정화 추진, 수업 시수 일부 조정의 6가지였다(교육인적자원부, 2007a). 2006년에 개정 고시된 2006년 개정 수학과 교육과정은 2007년 개정 교육과정과 동일한 방향에서 개정이 추진되었다. 따라서 2006년 개정 수학과 교육과정에서는 2007년 개정 교육과정의 개정의 기본 방향 중에서 수학과 국민 공통 기본 교육과정과 관련된 사항과 앞에서 논의한 제7차 수학과 교육과정 개정의 필요성을 반영하여 개정의 기본 방향을 다음과 같이 6가지로 설정하였다.

(1) 제7차 교육과정의 기본 철학 및 체제 유지

제7차 교육과정의 기본 철학은 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인재 양성을 목표로 하면서 학습자 중심의 교육과정을 추구하는 것이었다. 이에 따라 개정 수학과 교육과정에서는 학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 수준별 교육을 지속적으로 실시할 수 있는 기반을 제공하도록 한다. 또한 제7차 교육과정의 체제를 유지하기로 함에 따라 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지는 국민 공통 기본 교육과정 체제로 편성 · 운영하고, 고등학교 2, 3학년은 선택 중심 교육과정으로 편성 · 운영하도록 한다.

(2) 수준별 수업의 편성 · 운영 권한의 학교 부여

제7차 교육과정에 이어 2007년 개정 교육과정에서는 단위 학교의 교육과정 편성 · 운영 권한을 더욱 확대하는 것을 기본 방향으로 하고 있다. 이에 따라 수학과에서도 수준별 교육에 필요한 심화 또는 보충 과정의 학습 내용을 단위 학교에서 선정하여 지도할 수 있도록 한다. 즉, 국가 수준의 교육과정에서는 모든 학생들이 필수적으로 학습해야 할 수학과 학습 내용만 제시하고, 단위 학교에서는 각 학교 학생의 능력과 수준, 적성에 적합하게 수학과 교육 내용 및 방법을 재조직하여 지도할 수 있도록 수준별 수업의 편성 · 운영 권한을 각 학교에 부여하도록 한다.

(3) 국가 · 사회적 요구사항 반영

수학과와 관련된 국가 · 사회적 요구사항으로는 학생들의 진로와의 연계성을 강화한 수학 학습이 이루어질 수 있도록 해달라는 것이다. 따라서 개정 수학과 교육과정에서는 학생들이 미래에 전공하게 될 학문 분야나 직업의 세계에서 필요로 하는 수학을 충실히 학습할 수 있도록 수학과 교육 내용을 개선하도록 한다.

(4) 수학과 교육 내용의 적정화 추진

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 측면에서 적정화하도록 한다. 즉, 다음 학년의 내용을 학습하거나 미래 사회를 살아가는 데 필요한 수학과 교육 내용을 정선하고, 수학 수업 시간을 고려하여 학생들의 수학 학습량과 난이 수준을 적절하게 조정하도록 한다. 또한 제7차 수학 교육과정의 문제점으로 지적된 일부 학습 주제의 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 부족 문제를 해결하도록 한다.

(5) 수학적 능력 신장 추진

초 · 중등학교 수학 교육의 주요 목표인 수학적 능력 신장은 개정 수학과 교육과정에서도 지속적으로 강조하도록 한다. 특히, 수학적 의사소통 능력 신장을 강조하는 세계적인 추세를 우리나라 수학과 교육과정에도 반영하도록 하며, 논리적 추론 능력, 개연적 추론 능력, 문제해결력 등의 신장을 강조한다.

(6) 수학에 대한 정의적 태도 개선 추진

학생 개인뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력 강화를 위해, 학생들이 수학 학습에 관심과 흥미를 갖게 하고, 수학 학습에 자신감을 갖도록 하며, 수학의 유용성과 가치를 인식하게 하는 등 수학에 대한 정의적 태도를 개선하도록 한다.



2. 우리나라 수학과 교육과정의 변천

광복 후 우리나라 수학과 교육과정 개정의 기본 방향을 정리하면 다음과 같다.

(1) 교수요목의 시기(1946~1954)

- 교과의 지도 내용을 상세히 표시하고, 기초 능력을 배양하는 데 주력한다.
- 교과는 분과주의를 채택하고, 체계적인 지도와 지력의 배양에 중점을 둔다.
- 우리나라의 교육 목표인 홍익인간의 정신에 입각하여 애국애족의 교육을 강조하고, 일제의 잔재를 정신이나 생활에서 시급히 제거한다.

(2) 제1차 교육과정의 시기(1954~1963)

교수요목의 시기의 문제점을 개선하며, 학생들이 필요로 하는 욕구와 사회의 요구를 참작하고, 심리적인 배열과 체계적인 면을 적절히 고려하여 수학의 기본적인 개념이나 원리를 알게 하고, 사고 능력의 양성, 기초적인 과정과 상호 관계, 문제해결과 응용 능력, 기능의 숙달 등에 대하여 그 내용을 결정하고 지도 방법을 개선함으로써, 결과적으로 교육 목적을 달성하는 데 좋은 효과를 올려야 한다.

(3) 제2차 교육과정의 시기(1963~1973)

- 수학의 체계를 근간으로 계통적인 내용을 학생의 심신 발달의 단계에 맞고 다음 교과와 병행할 수 있도록 학년별로 안배하여, 생활 문제해결에 실천적으로 활용할 수 있도록 한다.
- 과학, 기술의 급진적인 발달에 따라 지도 내용을 충실히 하고 정비하여 논증적인 사고 능력, 수리적인 처리 기능을 기르도록 한다.

(4) 제3차 교육과정의 시기(1973~1981)

- 집합 개념을 토대로 한다.
- 수학적 구조에 중점을 둔다.
- 엄밀성을 강조한다.
- 현대 수학의 발전에 비추어 교재를 재구성한다.
- 응용면이 넓은 교재를 조기에 도입한다.

(5) 제4차 교육과정의 시기(1981~1987)

- 수학의 기초적인 개념과 기능을 강조한다.
- 수학적 구조나 논리의 엄밀성을 무리하게 강조함을 지양한다.
- 지도 내용의 양을 적정 수준으로 경감한다.
- 학습자의 발달 수준에 맞게 수준을 적정화한다.
- 문제해결력을 강조한다.

(6) 제5차 교육과정의 시기(1987~1992)

- 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선한다.
- 수학적 활동을 강화한다.
- 문제해결을 강화한다.
- 정의적 측면을 강조한다.

(7) 제6차 교육과정의 시기(1992~1997)

- 범국민적 기초 소양으로서의 수학 교육을 한다.
- 수학적 사고력을 신장한다.
- 문제해결력을 신장한다.
- 수학의 실용성을 강조한다.
- 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용한다.
- 학생의 적성, 능력, 진로 등에 적합한 학습의 기회를 제공한다.
- 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법을 이용한다.

(8) 제7차 교육과정의 시기(1997~2007)

- 단계형 수준별 교육과정으로 구성한다.
- 수학 학습 내용을 적정화한다.
- 학습자의 활동을 중시한다.
- 수학 학습에 흥미와 자신감을 가지게 한다.
- 다양한 학습 도구를 활용한다.

(9) 2006년 개정

- 수준별 수업 운영을 권장한다.
- 교육 내용을 적정화한다.
- 수학적 능력의 신장을 강조한다.
- 수학의 가치를 재고하고 정의적 측면을 강조한다.
- 문서 체제를 개선한다.

광복 후 우리나라의 수학 교육과정의 변천을 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

기별	공포(고시)	근거	특징
교수요목기	1947.9.1		• 광복 전 일본 체제의 교육과정 • 실용에 치중되었으며, 지도 내용이 어렵고 과다함. • 가르칠 주제를 열거하는 교수요목의 형태 • 해방 전의 교육 내용의 답습
제1차	1954.4.20	문교부령 제 35호	• 교과 중심 교육과정 • 생활 중심 수학 교육 • 수학 용어의 한글화
	1955.8.1	문교부령 제46호 고등학교 교육과정	
제2차	1963.2.15	문교부령 제120호 고등학교 교육과정	• 경험 중심 교육과정 • 수학의 계통성 중시 • 수학 교육 현대화 운동 일부 반영
제3차	1974.12.31	문교부령 제350호 고등학교 교육과정	• 학문 중심 교육과정 • 수학 교육 현대화 운동의 정신 반영 • 수학 내용의 조기 도입 • 수학의 구조와 엄밀성 강조
제4차	1981.12.31	문교부령 제442호 고등학교 교육과정	• 수학 교육 현대화 운동의 반성 • '기본으로 돌아가기' 정신의 반영 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결 학습의 중요성 인식
제5차	1987.3.31	문교부 고시 제88-7호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결력의 강조
제6차	1992.10.30	교육부 고시 제1992-19호 고등학교 교육과정	• 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 정보화 사회 대비 • 문제해결력의 강조 • 다양한 평가 방법 권장
제7차	1997.12.30	교육부 고시 제1997-15호 고등학교 교육과정	• 학습자 중심 교육과정 • 수준별 교육과정(단계형과 과목 선택형) • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • '수학적 힘'의 신장 도모
2006년 개정	2006.8.29	교육인적자원부 고시 제2006-75호 수학과 교육과정	• 현실 적합한 수준별 수업 방안 제시 • 교육 내용의 적정화 • 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조 • 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조



3. 개정 수학과 교육과정 개정의 중점

개정 수학과 교육과정은 교육과정 개정의 기본 정신을 반영하고, 수학과 교육과정 개정의 필요성과 외국의 수학 교육 동향, 그리고 제7차 수학과 교육과정의 운영상의 문제점을 고려하여 다음과 같은 개정의 중점 사항을 설정하였다.

01 수준별 수업의 도입

수학은 학생들의 개인 차이가 가장 크게 드러나는 교과이므로, 수학 수업에서는 특히 학생들의 수준 차이에 대응되는 적절한 내용을 제공할 필요가 있다. 이러한 필요성에 따라 학생이 자기의 능력 수준에 맞는 학습을 할 수 있는 수준별 교육이 고안되었다.

제7차 단계형 수준별 교육과정은 우리나라 학교 상황에서 현실적으로 운영에 어려운 점이 많아 현재 명목상으로만 존재하고 있다. 개정 교육과정에서는 특별 보충과정을 형식적으로 운영하는 것을 제외하고는 편성 · 운영이 이루어지지 않고 있는 단계형 수준별 교육과정을 개정하여 수준별 수업 운영을 권장하고 있다. 이것은 수준별 교육과정을 도입한 본래의 취지인 '학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 교육 실시' 라는 본질적인 정신은 살리면서도 우리나라 학교 상황에서 운영 가능한 수준별 수업을 할 수 있도록 하기 위한 것이다. 이를 위하여 각 학교에서는 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞는 수준별 집단을 편성 · 운영할 수 있도록 하였다.

수준별 교육과정의 아이디어를 내용상으로 구현한 것이 '익힘책' 의 도입이라고 할 수 있다. 심화 과정도 마찬가지이지만 보충 과정에 선정될 수 있는 내용은 학생에 따라 천차만별일 수 있으므로, 국가 수준의 교육과정에서는 이를 일률적으로 제시하지 않았다.

그 대신 익힘책의 보충 과정에 해당하는 최소 필수 내용 선정시 고려해야 할 사항이나 보충 과정 내용의 예시를 제시함으로써, 보충 과정 내용을 선정하는 데 도움이 되도록 하고 있다.

익힘책에 제시된 심화 과정은 기본 과정을 성공적으로 학습한 학생들이 발전적으로 학습할 수 있는 내용으로, 기본 과정에서 습득한 지식을 실생활에 활용하는 다양한 방법을 찾아보거나, 문제해결력의 배양과 관련된 내용이 주류를 이룬다.

그러나 심화 과정의 내용이 상위 단계에서 학습할 수학적 개념, 원리, 법칙을 미리 도입하거나 탐구하게 해서는 안 된다. 즉, 심화 과정이 속진의 의미나 난이도상의 심화로 해석되어서는 안된다.

02 선택 중심 교육과정의 구성 및 다양한 선택 과목의 설정

고등학교 2학년, 3학년에 해당되는 선택 중심 교육과정의 기본 취지는 다양한 선택 과목을 제시하고, 학생들은 자신의 능력, 진로, 적성에 부합되는 과목을 선택하여 학습할 수 있도록 한다는 것이다. 고등학교 2학년과 3학년 학생은 선택 과목 중에서 자신의 진로와 능력, 흥미 등을 고려하여 과목을 선택할 수 있다.

수학 계열의 교과목명과 상세한 구분은 다음과 같다.



(1) 수학의 활용

'수학의 활용' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 학습한 학생이면 선택할 수 있는 과목으로, 실생활에 필요한 수학적 지식과 기능을 습득하도록 하는데 적합하다. '수학의 활용' 의 학습을 통하여 실생활의 여러 가지 문제를 수학의 관점에서 이해하고 합리적으로 해결하는 능력을 신장시키며, 수학에 대한 관심과 흥미를 길러 수학에

대한 긍정적 태도를 기를 수 있다.

'수학의 활용' 의 내용은 '명제와 논리', '지수와 로그', '수열', '확률과 통계', '도형과 그래프' 로 구성된다.

(2) 수학 Ⅰ

'수학 I' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 다음 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다. '수학 I' 의 학습을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

'수학 I' 의 내용은 '행렬과 그래프', '지수함수와 로그함수', '수열', '수열의 극한' 으로 구성된다.

(3) 미적분과 통계 기본

'미적분과 통계 기본' 은 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문과학, 사회과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다. '미적분과 통계 기본' 의 학습을 통하여 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

'미적분과 통계 기본' 의 내용은 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법', '확률', '통계' 로 구성된다.

(4) 수학 Ⅱ

'수학 II' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. '수학 II' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '수학 II' 의 내용은 '방정식', '부등식', '삼각함수', '함수의 극한과 연속', '미분법' 으로 구성된다.

(5) 적분과 통계

'적분과 통계' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. '적분과 통계' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '적분과 통계' 의 내용은 '적분법', '순열과 조합', '확률', '통계' 로 구성된다.

(6) 기하와 벡터

'기하와 벡터' 는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 과목이다. '기하와 벡터' 는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다. '기하와 벡터' 의 내용은 '일차변환과 행렬', '이차곡선', '공간도형과 공간좌표', '벡터' 로 구성된다.

03 교육 내용의 적정화

개정 교육과정에서는 수학과 교육 내용을 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 학습량, 난이 수준, 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성의 측면에서 적정화하였다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성과 관련하여 수학과 교육 내용을 적정화하였다.

실생활에 널리 활용되고 여러 나라에서 공통적으로 지도되고 있는 수학적 개념에 대한 지도를 보강하도록 하였다.
둘째, 수학의 학습량과 난이 수준을 적정화하였다.
셋째, 개정 교육과정에서는 학년 간, 학교급 간, 교과 간의 연계성을 강화하고 연관된 내용은 밀접하게 관련지어 학습할 수 있도록 함으로써 학습 효과를 높일 수 있게 하였다.

04 수학적 능력의 신장 강조

수학적 능력 신장을 강조하기 위하여 수학과 교육 목표, 내용, 교수 · 학습 방법, 평가 등 교육과정 전반에서 일관되게 수학적 능력 신장과 관련된 언급을 하고 있다. 예를 들어, 교수 · 학습 방법에서는 수학적 사고와 추론 능력 신장을 위하여 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 하며, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합해 보며, 학생 자신의 사고 과정을 반성해 보게 하고 있다.
수학적 문제해결력 신장은 제4차 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며 미래를 살아갈 학생들에게도 지속적으로 필요한 능력이라는 점에서 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조될 필요가 있다. 이를 위하여 개정 교육과정에서는 교육 목표에서뿐만 아니라 내용, 교수 · 학습 방법, 평가에 걸쳐 일관되게 강조하고 있다.

05 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

국제 학업 성취도 비교 평가에서 우리나라 학생들의 수학 성취도가 전 세계에서 최상위권이면서도 수학에 대한 관심과 흥미가 적고 수학에 대한 자신감이 부족하며 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나는 사실은 학생의 입장에서 뿐만 아니라 국가적으로도 심각한 문제가 아닐 수 없다. 이러한 현실을 개선하기 위하여 수학과 교육과정에서는 수학과 교육목표에서부터 수학에 관심과 흥미를 갖도록 하고, 수학의 가치를 이해하며 수학에 대한 긍정적 태도를 기르도록 할 것을 강조하였다.

06 문서 체제 개선

단계형 수준별 교육과정이 개정됨에 따라 교육과정 문서 체제도 다소 변화하였다.
첫째, '단계' 라는 용어 대신에 '학년', '학기' 라는 용어를 사용하였다. 즉, 1－가 단계와 1－나 단계를 묶어 1학년으로 나타내고, 1－가 단계는 1학년 1학기로 나타내었다.
둘째, 수학과 목표를 제시할 때, 국민 공통 기본 교육 기간 10년에 걸친 총괄 목표 외에도 초등학교, 중학교, 고등학교의 학교급별 목표를 제시하였다. 이것은 학교급별 교육의 목표를 좀 더 구체적으로 제시하는 것이 필요하다는 총론의 방침을 따른 것이다. 한편, 제7차 교육과정에서는 수학과에만 '단계별 목표' 를 제시하였다. 그러나 모든 교과의 교육과정 문서 체제가 일관성을 유지하는 것이 필요하고, '단계별 목표' 와 학습 내용 사이에 중복이 심하다는 의견에 따라 이를 삭제하였다.
셋째, 내용 영역을 20단계로 제시하던 것을 학년 단위로 제시하였다. 학년 단위로 학습 내용을 제시함으로써 교사가 학교와 학생의 여건에 맞게 학습 내용을 탄력적으로 조절하여 수업할 수 있도록 하였다.
넷째, 초등학교와 중 · 고등학교 내용 영역명을 구분하였다. 제7차 교육과정에서는 국민 공통 기본 교육 기간인 10년 동안에 수학의 계통성을 고려하고 학습 내용의 일관성을 유지하기 위하여 초, 중, 고등학교의 내용 영역명을 통일하여 제시하였다. 그러나 학교급별로 강조하거나 중점적으로 다루어야 할 내용이 약간씩 다르고 각 내용 영역에 속한 내용의 적절성 논란이 심해짐에 따라, 학교급별 학습 내용의 특성을 살리고 학습 내용 간의 연계성을 강화하기 위하여 학교급별로 내용 영역명을 다소 다르게 제시하였다. 이에 따라 초등학교 수학은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결의 5개 영역으로 구분하여 제시하였고, 중 · 고등학교 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하의 5개 영역으로 구분하여 제시하였다.



4. 수학과 교육과정 해설

01 성격

(1) 수학의 개관

수학은 수량과 관련된 수학적 사실, 관계, 규칙을 다루며, 공간에서 일어나는 다양한 현상들에 대해 연구하는 분야이다. 수학은 우리 인간의 생활 영역이나 지식의 세계에서 주로 수리적 계산이나 사고, 공간 감각과 직접적인 관련이 있으며, 또한 개인의 생각이나 개념을 정확하고 간결하게 전개, 표현하는 것을 용이하게 해 준다. 여기에서는 이러한 수학의 특성과 가치를 알아보고자 한다.

① 수학의 특성

수학은 추상성, 이상성, 실용성, 논리성과 직관성, 형식성, 일방성과 특수성, 계통성 등의 특성을 가지고 있다(교육부, 1999a).

추상성은 어떤 구체물의 집합에서 이질적인 속성을 제거하고, 동질적인 속성만을 추출하는 추상화 과정과 관련된 것으로, 수학에서 다루는 대상은 대부분 추상화하여 얻어진 개념이라는 점에서 추상성은 수학 교과가 가지는 핵심적 특성이라고 할 수 있다. 이상성은 추상성과 밀접하게 관련된 것으로, 수학적 사고 과정에서 그 사고의 대상인 사물이나 현상에 대하여 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양으로 보는 것이 아니라, 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킴으로써 얻게 되는 특성이다.

땅의 넓이나 산의 높이를 구할 때 수학의 이론을 적용하여 측정하는 것과 같이 실제 생활에서 수학이 유용하게 사용되는 점, 다른 교과의 학습을 돕는 기초적인 도구 교과로서의 역할을 수행하는 점은 수학의 실용성을 보여준다.

한편, 전제나 선행 명제로부터 결론이나 후속 명제를 타당하게 이끌어 내는 논리성은 다른 어떤 교과보다 수학 교과에 특징적인 것이다. 그러나 논리적으로 정당화되는 대상은 사실상 직관에 의해서 발견되고, 발명되는 경우가 많다는 점에서 수학에서 직관성도 매우 중요하다. 또한 수학의 개념이나 원리가 추상화의 사고 과정을 통하여 발견되고 추출된 다음, 더욱 발전된 일반성을 가지는 활용 방법을 얻는 과정에서 갖출 필요가 있는 격식인 형식성은 수학적 표현의 엄밀성을 보장하기 위한 장치로서, 수학의 힘을 증대시키고 효율적인 사고를 가능하게 해 주는 특징적인 것이다.

일반성은 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 집합에 대한 고찰로 확장시키는 일반화의 성질을 가리키는 것으로 수학에서 사용되는 여러 가지 원리와 법칙을 발견(구성)하게 해 준다. 특수성은 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮겨가는 특수화의 성질을 가리키는 것으로, 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이에 대한 실마리를 제공해 주기도 한다.

계통성은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써, 발전되고 통합된 새로운 내용을 일관성 있게 이어나가는 것으로, 수학적 개념의 확장과 관련된다. 수학은 어느 교과보다도 계통성이 강한 교과이며, 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 준다.

② 수학의 가치

수학의 가치에 대한 논의는 수학을 가르쳐야 하는 이유와 직결되는 것으로 수학 교육의 목표를 설정하고 그 의의를 찾는 바탕이 된다. 수학의 가치로는 다음과 같은 네 가지가 일반적으로 제안되고 있다.

첫째는 수학의 실용적 가치이다. 이는 수학을 배우면 사회 생활을 하는 데 그리고 장차 과학이나

다른 학문을 하는 데 유익하다는 것이다. 수 개념이나 사칙연산 등과 같이 어떤 수학적 지식은 사회 생활을 하는 데 필수적이며, 또 어떤 수학적 지식은 사회 생활에 직접 소용이 되지 않는다 하더라도 다른 학문을 하는 데 필수적이다. 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 수학의 중요성이 점점 증대되고 있을 뿐만 아니라 공학, 경제학을 비롯하여, 산업, 금융, 국방, 정보통신, 의학 등 많은 학문 분야에서 수학은 기초적인 학문으로서 중요한 역할을 한다.

둘째는 수학의 도야적 가치이다. 이는 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 수학을 배우면서 습득한 합리적이고 논리적인 사고력, 추상화 능력, 창의성, 비판적 사고 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등은 수학이 아닌 다른 분야에서도 그 위력을 발휘할 수 있다. 이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신능력으로서 수학을 배워야 하는 강력한 이유가 된다.

셋째는 수학의 심미적 가치이다. 이는 수학적 대상도 아름다우며, 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다는 것이다. 학생들 수준에서 수학의 심미적 가치를 쉽게 인식하기는 어렵지만, 많은 수학자들이 수학에서 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움을 강조하였다. 우주와 자연의 조화로운 질서를 밝혀내는 수학적 개념과 이론들은 그 자체로 아름답다.

넷째는 수학의 문화적 가치이다. 이는 인류가 오래전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 지적 문화 유산을 수용하고 다음 세대에 잘 전달하는 것이 가치가 있다는 것이다. 수학은 수많은 사람들의 노력을 거쳐 생동하며 발전해 오면서 각 시대마다 그 사회 발전에 공헌해 왔으며, 현대에도 다방면에 걸쳐 기여하는 바가 큰 인류의 소중한 정신적, 문화적 유산이다. 그러므로 수학을 배우는 것은 곧 인류가 남긴 문화적, 학문적 유산을 계승하여 활용하고 발전시키는 일에 참여하는 셈이 된다.

학교수학이 다루는 내용은 학문으로서의 수학의 수준이나 그 범위와는 차이가 있다. 하지만 수학 교과를 학습함으로써 학습자가 획득하기를 기대하는 것은 수학의 학문적 특성과 가치의 맥락에서 크게 벗어나지 않는다. 수학을 가르치고 배우는 활동 속에서 사용되는 소재와 내용이 무엇이든지 간에 그것을 통해 수학의 특성을 인식하고 그 가치를 느끼는 것이야말로 수학 교육을 통해 달성할 중요한 목적이라고 할 것이다. 그러므로 수학을 가르치는 교사가 먼저 수학이 지닌 독특한 특성과 그 가치를 느끼고, 수업을 통해 그와 같은 것이 학생들에게 전달될 수 있어야 할 것이다.

(2) 수학과 목적

수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

(3) 수학 학습의 필요성

수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결 능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다. 또한 수학적 지식과 사고 방법은 오랜 역사를 통해 인간 문명 발전의 지적인 동력의 역할을 해 왔으며, 미래의 지식 기반 정보화 사회를 살아가는 데 필수적이다.

(4) 수학과 교육 내용

초등학교 수학과 교육 내용은 '수와 연산', '도형',

'측정', '확률과 통계', '규칙성과 문제해결'의 5개 영역으로 구성된다. '수와 연산' 영역에서는 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산을, '도형' 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념과 성질을, '측정' 영역에서는 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 자료의 정리와 해석, 경우의 수, 확률의 의미를, '규칙성과 문제해결' 영역에서는 규칙 찾기, 비와 비례, 문자의 사용, 간단한 방정식, 정비례와 반비례, 여러 가지 문제해결 방법을 다룬다.

중학교와 고등학교 수학과 교육 내용은 '수와 연산', '문자와 식', '함수', '확률과 통계', '기하'의 5개 영역으로 구성된다.

중학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산, 근삿값을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 개념과 사칙계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식과 연립일차부등식, 이차방정식의 풀이와 활용을, '함수' 영역에서는 함수 개념, 일차함수의 개념과 활용, 이차함수의 개념을, '확률과 통계' 영역에서는 도수분포에 대한 이해와 활용, 확률의 기본 성질, 대푯값과 산포도를, '기하' 영역에서는 기본 도형의 성질에 대한 이해와 증명, 피타고라스의 정리, 삼각비에 대한 이해와 활용을 다룬다.

고등학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합의 연산 법칙, 명제의 이해와 활용, 실수의 성질, 복소수의 개념과 사칙계산을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 연산과 활용, 유리식과 무리식의 계산, 이차방정식의 활용, 고차방정식, 연립방정식, 이차부등식, 연립부등식, 절대부등식의 풀이를, '함수' 영역에서는 이차함수의 활용, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 순열과 조합의 이해를, '기하' 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역의 이해와 활용을 다룬다.

(5) 수학과 교수 · 학습 방향

수학의 교수 · 학습에서는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다. 또한 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지도록 한다.

02 목표

발전된 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

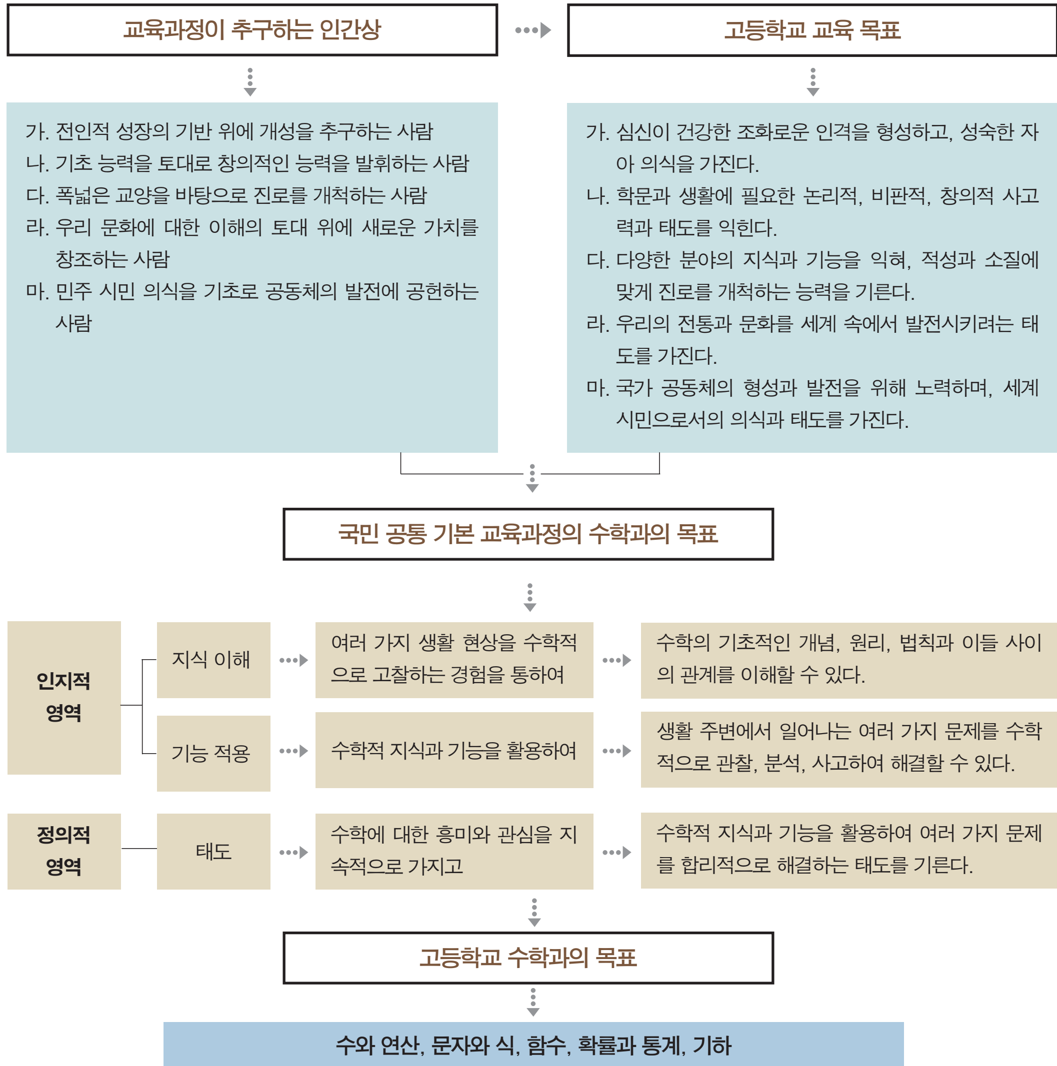
가. 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 발전된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 문제를 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(1) 목표 체계표

수학과의 목표는 고등학교 교육 목표를 바탕으로 하고 있고, 고등학교 교육 목표는 교육과정에서 추구하고 있는 인간상을 그 출발점으로 삼고 있다. 수학과 목표는 이런 배경을 지니고 있는 바, 일련의 목표 사이의 위계 관계를 체계화하여 표로 나타내면 다음과 같다.



(2) 총괄 목표

2006년 개정 수학과 교육과정에서 고등학교 수학과의 목표는 다음과 같은 국민 공통 기본 교육과정 전체에 대한 수학과의 총괄적인 목표와 관련지어 이해되어야 한다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

2006년 개정 교육과정이 추구하는 인간상을 구현하기 위한 수학 교육의 목표는 크게 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양이다. 이런 의미에서 고등학교 수학과에서는 고등학교 학생들이 가져야 할 기초적인 수학적 지식의 습득을 중요시함과 동시에 이를 토대로 여러 가지 사물의 현상을 수학적으로 표현하고, 사고하고, 처리하는 능력과 수학적 태도의 육성을 그 목표로 하고 있다.

(3) 하위 목표

총괄 목표에 이어 고등학교 수학과의 하위 목표가

인지적 영역과 정의적 영역으로 구분되어 제시되어 있다. 인지적 영역에서는 수학적 지식과 이해, 기능과 적용에 대하여, 정의적 영역에서는 수학적 태도에 관하여 각각 설명하고 있다.

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

목표 '가' 항은 수학과의 학습 지도에 있어 지식과 이해에 관한 목표라고 볼 수 있다. 먼저, 일상생활에서 일어나고 관찰되는 여러 현상을 수학적으로 생각하는 활동을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계로부터 구성된 원리, 법칙 등을 학습자가 찾아내어 이해하도록 지도해야 한다는 것이다.

목표 '나' 항은 학습 지도에 있어 기능 · 적용에 관한 목표이다. 이 목표는 수학적 지식과 기능을 바탕으로 여러 가지 생활 문제를 수학적으로 해결할 수 있는 능력을 기르게 하는 것이다.

목표 '다' 항은 태도에 관한 목표라고 할 수 있다. 이 목표는 앞의 목표 '가' 와 '나' 의 달성 없이는 기대할 수 없을 것이며, 역으로 수학에 대한 흥미와 관심 없이 목표 '가' 와 '나' 의 효과적인 달성은 어려울 것이다. 따라서 목표 '다' 는 목표 '가' 와 '나' 항의 지도를 통하여 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가질 수 있도록 하고, 이를 바탕으로 하여 사물의 현상을 합리적으로 생각하여 해결하고자 하는 태도를 육성하도록 지도하자는 것이다.

03 교수 · 학습방법

개정 수학과 교육과정에서 교수 · 학습 방법의 특징은 학습자의 심리, 인지 수준 및 학습 능력을 최대한 고려하여, 이를 학교 현장의 실제 수학 수업에 구현하려는 이른바 학습자 중심의 교수 · 학습의 의지를 강하게 나타내고 있다는 점이다. 즉, 개정 수학과 교육과정의 교수 · 학습은 학습자의 수준에 따른 수준별 학습 적용, 학습 방법의 다양화, 학습자의 능동적 학습 활동 강조, 학습자의 수학 학습에 대한 흥미와 관심의 유발, 학습자의 실제 경험과 관련된 문제해결 강조 등을 강조하고 있다. 이와 관련하여 세부적인 사항을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 교육과정 내용의 지도 방법

① 교육과정에 제시된 내용은 모든 학생이 도달해야 할 성취 기준이므로, 학생의 특성, 학년 간 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 적절히 지도되어야 한다.

② 학년별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(2) 보충 · 심화 학습의 기회 부여

교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

교육과정에는 기본 내용만 제시하고 있으며, 교육과정상 명시된 기본 내용을 지도한 후 여전히 학습 목표에 제대로 도달하지 못한 학생들에게는 보충 학습의 기회를 제공할 수 있다. 이는 강제적 규정은 아니지만 학교 현장에서는 교육과정에 제시된 기본 내용에 대한 일반적인 이해나 학습이 제대로 이루어지지 못했다고 판단되는 학생들을 위하여 제반 여건이 허락하는 범위 내에서 보충 학습의 기회를 부여할 수 있다.

한편, 교육과정에 제시된 기본 내용을 지도한 후 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 제공할 수 있다. 심화 학습도 교육과정상 명시되어 있지는 않지

만, 기본 학습 내용으로 이미 학습한 내용에 대한 이해와 적용의 폭을 넓히거나 그 내용과 관련하여 수업 자료를 좀 더 풍요롭게 제공하는 방식으로 내용을 상세화 할 수 있다. 그렇지만 심화 학습이 자칫 해당 학년의 내용의 범위나 수준을 벗어나거나 난이도 면에서도 지나치게 어려운 경우는 피해야 할 것이다. 즉, 상위 학년에서 학습할 내용을 미리 도입하거나 그 내용과 관련되어 있는 내용을 다루어서는 안 된다.

(3) 다양한 교수 · 학습 방법의 제공

학생들이 수학 학습의 본연의 목적을 달성하고 교육과정에서 제시하는 기본 학습 내용을 습득하도록 하기 위하여 다양한 교수 · 학습 방법을 제공해야 한다. 수학과 수업에서 적용 가능한 다양한 교수 · 학습 방법과 그 실천을 위한 구체적인 내용은 다음과 같다.

① 수학과 수업에서는 교육 내용과 학생의 특성을 고려하여 발견 학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습, 설명식 교수 등 다양한 교수 · 학습 방법을 활용할 수 있다.

② 수학 수업에서 의미 있는 발문을 하기 위하여 다음 사항에 유의한다.

- 발문은 학생의 인지 발달과 경험을 고려하여 선택하고, 그에 대한 반응을 의미 있게 처리한다.
- 가능하면 열린 형태의 발문을 하여 창의적인 답이 나올 수 있게 한다.

③ 수학적 개념, 원리, 법칙의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다.

- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 도입한다.
- 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하게 한다.

(4) 수학적 능력의 신장을 위한 교수 · 학습 방법

① 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
- 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

② 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
- 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통 할 수 있게 한다.
- 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

③ 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

- 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
- 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
- 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.
- 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
- 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

(5) 수학에 대한 긍정적 태도 신장을 위한 교수 · 학습 방법

수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

① 여러 가지 현상에서 접할 수 있는 수학을 다룸으로써, 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 느낄 수 있게 한다.

② 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 갖도록 학습 동기와 의욕을 유발한다.

(6) 교육 기자재의 활용

수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.

① 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.

② 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.

(7) 수준별 수업의 운영

각 학교에서는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 수준별 수업을 운영할 수 있다. 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.

① 수준별 수업은 학교 상황에 맞게 수준별 집단을 편성하여 운영할 수 있다.

② 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 운영한다.

04 평가

평가는 학생이 특정한 수학 내용을 학습한 후에 치르는 시험 이상의 것이어야 한다. 평가는 교수 · 학습 개선을 위한 피드백을 제공해야 하며, 또는 의미 있는 수학 학습을 뒷받침할 수 있어야 한다. 평가는 교사가 교수학적 결정을 내릴 때 정보를 주고 안내하는 교수 활동의 필수적인 부분이어야 하며, 학생들의 학습을 안내하고 향상시킬 수 있어야 한다.

(1) 평가의 목적

① 수학 학습의 평가는 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 수준을 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

(2) 평가의 방법

① 수학 학습의 평가는 수업의 전개 과정에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등의 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

② 수학 학습의 평가에서는 획일적인 방법을 지양하고 지필평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 통해 수학 교수 · 학습을 향상시킬 수 있게 한다.

(3) 인지적 영역의 평가

인지적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

① 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

② 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력

③ 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력

④ 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

⑤ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

⑥ 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(4) 정의적 영역의 평가

정의적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 학생들의 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감 등의 정도를 파악한다.

다음의 표는 각각의 하위 영역에서 활용할 수 있는 세부 항목들이며, 학교 현장에서 이를 직접적으로 활용하는 교사는 아래의 세부 항목들을 적절히 선택하여 활용할 수 있다. 각각의 항목에 대해 교사는 '전혀 그렇지 않다', '그렇지 않다', '보통이다', '그렇다', '매우 그렇다'와 같은 5가지 척도로 평가할 수 있으며, 목적에 맞게 척도를 다양하게 설정할 수도 있다.

정의적 영역	세부 항목
수학에 대한 흥미와 호기심	수학을 하는 것을 즐거워한다. 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다. 수학 수업 시간을 기다린다. 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다. 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.
수학에 대한 자신감	수학 공부에 자신감을 가지고 있다. 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다. 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다. 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.
수학에 대한 불안	수학 수업이 어려울까봐 걱정한다. 수학 성적이 나빠질까봐 걱정한다. 수학 문제를 풀 때 긴장한다.
수학의 유용성 인식	수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다. 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다. 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다. 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.
과제 집착력과 의지	수학 공부를 열심히 한다. 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다. 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다. 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.
창의적 사고	다른 사람의 방법을 그대로 따라하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다. 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다. 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.
수학 수업에의 참여	수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다. 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다. 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다. 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.

(5) 평가에서 공학적 도구의 활용

수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생들에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.



5. 제7차 교육과정과 2006년 개정 교육과정의 내용 비교

2006년 개정 수학과 교육과정은 앞의 개정의 필요성, 개정의 중점에서 언급한 바와 같이 수준별 교육과정으로 구성, 운영하도록 하였으며 특히, 학습 내용이 상 · 하위 학년으로 이동된 부분이 있다.

미적분과 통계 기본의 내용에 대하여 제7차 교육과정과 2006년 개정 수학과 교육과정을 비교 · 정리하면 다음과 같다.

제7차 교육과정	2006년 개정 교육과정	비고
〔수학 Ⅱ〕		• 수학 Ⅱ의 '함수의 극한과 연속성', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'과 수학 Ⅰ의 '순열과 조합', '확률', '통계'의 일부분이 수정 · 보완되어 합쳐짐 • 수학 Ⅱ의 '함수의 극한과 연속성', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'이 미적분과 통계 기본으로 이동
(2) 해석		• 영역명 삭제
(가) 함수의 극한과 연속성	(가) 함수의 극한과 연속	• 연속성 → 연속
1 함수의 극한 ① 함수의 극한의 뜻을 안다. ② 함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.	**1** 함수의 극한 ① 함수의 극한의 뜻을 안다. ② 함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.	• 함수의 극한값을 구하는 방법과 원리는 간단한 예를 통하여 이해하는 수준으로 다룬다.
2 함수의 연속성 ① 함수의 연속의 뜻을 안다. ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	**2** 함수의 연속 ① 함수의 연속의 뜻을 안다. ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	
용어와 기호 | 구간, 폐구간, 개구간, 반폐(개)구간, 좌극한, 우극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소의 정리, 중간값의 정리, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$	용어와 기호 | 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간, 좌극한, 우극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소의 정리, 중간값의 정리, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$	• 폐구간, 개구간, 반폐(개)구간을 각각 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(열린) 구간으로 명칭 변경

(나) 다항함수의 미분법	**(나) 다항함수의 미분법**	
1 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다. ③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	**1** 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다. ③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	
2 도함수 ① 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. ② 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.	**2** 도함수 ① 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. ② 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.	• 지나치게 복합한 함수는 다루지 않음
3 도함수의 활용 ① 접선의 방정식을 구할 수 있다. ② 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있다. ③ 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. ⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다. ⑥ 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.	**3** 도함수의 활용 ① 접선의 방정식을 구할 수 있다. ② 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있다. ③ 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있다. ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. ⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다. ⑥ 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.	• 미분과 관련된 실생활의 사례나 타 학문 분야의 예를 다양하게 제시함으로써 미분의 유용성을 인식할 수 있게 함
용어와 기호 | 증분, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 도함수, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극대값, 극소값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$	용어와 기호 | 증분, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 도함수, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$	• '극대값'이 '극댓값'으로, '극소값'이 '극솟값'으로 용어 명칭 변경
(다) 다항함수의 적분법	**(다) 다항함수의 적분법**	
1 부정적분 ① 부정적분의 뜻을 안다. ② 실수배, 합, 차의 부정적분을 구할 수 있다.	**1** 부정적분 ① 부정적분의 뜻을 안다. ② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.	• 지나치게 복잡한 함수는 다루지 않음
2 정적분 ① 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 정적분과 부정적분의 관계를 이해한다. ④ 정적분의 기본 정리를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	**2** 정적분 ① 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다. ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	• 정적분의 기본 정리 용어화
3 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. ② 회전체의 부피를 구할 수 있다.	**3** 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	• 적분과 관련된 실생활의 사례나 타 학문 분야의 예를 다양하게 제시 • 적분과 통계에서 배움

③ 속도와 거리에 관한 문제에 활용할 수 있다.	② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있다.	
용어와 기호 | 부정적분, 피적분함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$	용어와 기호 | 부정적분, 피적분함수, 원시함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 위끝, 아래끝, 정적분의 기본 정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$	• 추가된 용어 원시함수, 정적분의 기본 정리
〔수학 I〕 **(3) 확률과 통계**		• 수학 I 의 '순열과 조합', '확률', '통계'의 일부분이 수정·보완되어 미적분과 통계 기본으로 이동
(가) 순열과 조합	**(라) 확률**	• 영역명 삭제
1 경우의 수 ① 합의 법칙, 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.		• 경우의 수, 순열과 조합은 고 1로 이동
2 순열 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. ② 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.		• 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열은 적분과 통계에서 배움
3 조합 ① 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.	**1** 조합 ① 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.	• 고 1에서 순열과 조합에 대하여 간단히 배웠으므로 바로 중복조합에 대하여 배움
4 이항정리 ① 이항정리를 이해한다. ② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	② 이항정리의 뜻과 그 성질을 이해한다.	• 여기서는 축소하여 배우고, 적분과 통계에서 7차 교육과정과 같게 배움
용어와 기호 | 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\Pi_r$		• 이동된 용어 순열, 계승, 조합, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\mathrm{C}_r$는 고 1로 이동 원순열, 중복순열, 파스칼의 삼각형, ${}_n\Pi_r$는 적분과 통계로 이동
(나) 확률 **1** 확률의 뜻 ① 통계적확률과 수학적확률의 뜻을 알고, 그 관계를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다.	**2** 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해하고, 그 관계를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다.	• 뜻 → 의미

2 확률의 계산		
① 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	
② 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	
	3 조건부확률	
③ 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	
④ 사건의 독립과 종속의 뜻을 이해한다.	② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.	
⑤ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	• 확률의 곱셈정리는 조건부확률과 관련지어 간단하게 다룸
⑥ 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.		• 삭제(확률의 곱셈정리 내용 안에 들어감)
용어와 기호 | 시행, 사건, 확률, 통계적확률, 수학적확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\|A)$	용어와 기호 | 중복조합, 이항정리, 이항계수, 시행, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\|A)$	• 용어 통계적확률, 수학적확률의 띄어쓰기가 바뀜 • 이동된 용어 사건은 중 2로 이동
(다) 통계	**(마) 통계**	
1 확률분포	**1** 확률분포	
① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.	
② 이산확률변수의 기대값(평균)과 표준편차의 뜻을 이해하고, 이를 구할 수 있다.	② 이산확률변수의 뜻을 알고, 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.	
③ 이항분포의 뜻을 이해하고, 이항분포에서 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	
	④ 연속확률변수의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	• 앞에서 적분법을 배우므로 연속확률변수의 내용이 들어옴
④ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.	⑤ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.	
2 통계적 추정	**2** 통계적 추정	
① 모집단과 표본의 뜻을 안다.	① 모집단과 표본의 뜻을 안다.	• 표본평균과 모평균의 관계는 간단한 예를 통하여 이해하게 함
② 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.	② 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.	
③ 모평균을 추정할 수 있다.	③ 모평균을 추정할 수 있다.	• 표본분산은 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 을 이용하여 구함
용어와 기호 | 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 이항분포, 큰수의 법칙, 정규분포, 정규분포곡선, 표준화, 표준정규분포, 표본, 전수조사, 표본조사, 모집단, 임의추출, 모평균, 모표준편차, 표본평균, 표본표준편차. 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$	용어와 기호 | 확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준화, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$, $\overline{X}$	• 큰수의 법칙의 띄어쓰기가 바뀜 • '기대값'을 '기댓값'으로 용어 변경 • 삭제된 용어 정규분포곡선 • 추가된 용어 확률질량함수, $\sigma(X)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$, $\overline{X}$

〈수학 교사에게 필요한 추천 자료 및 도서 목록〉

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15호. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술 · 가정 -. 교육부.

교육부(1999a). 중학교 교육과정 해설(Ⅰ) - 총론 -. 교육부.

교육인적자원부(2006). 수학과 교육과정 교육인적자원부 고시 제2006-75호 수정 고시에 따른 보도자료. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007a). '2007년 개정 교육과정' 개요. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2007b). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호. 교육인적자원부.

교육인적자원부(2008). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술 · 가정 -. 교육과학기술부.

구광조 외 5명(1988). 수학과교육론, 서울: 갑을출판사.

문교부(1980). 한국 교육 30년. 문교부.

박선화 외 7명(2005). 수준별 수업 활성화 방안 연구. 한국교육과정평가원.

박선화 외 14명(2006). 수학과 교육과정 개정 시안 수정 · 보완 연구. 한국교육과정평가원.

박순경 외 9명(2007). 초 · 중학교 교육과정 해설-총론-. 2007년 개정 교육과정 해설 교육인적자원부 위탁과제 답신 보고서. 한국교육과정평가원

신성균 외 6명(2005). 수학과 교육과정 개선 방안 연구. 한국교육과정평가원.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

이미경 외 6명(2004a). PISA 2003 결과 분석 연구 - 수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소양 수준 및 배경 변인 분석- 한국교육과정평가원.

이미경 외 6명(2004b). PISA 2003 공개문항 분석 자료집. 한국교육과정평가원.

최승현(1999). 수학 교과에서의 자기평가. 학교수학, 1(1), 123-133.

황혜정 외 5명(2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.

Brousseau, G.(1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kruwer Academic Publishers

Burton, G. M.(1985). Writing as a way of knowing in mathematics education class. Arithmetic Teacher, 33(4), 40-45.

Davis, P. J. & Hersh, R.(1981). The Mathematical Experience. 양영오 · 허민(공역)(1995). 수학적 경험. 경문사.

Freudenthal, H.(1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kennedy, L. M., Tipps, S., Johnson, A.(2004). Guiding children's learning of mathematics. Belmont: Wadsworth.

Kenny, P. A., & Silver, E. A. (1983). Student self-assessment in mathematics. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Eds.), Assessment in the mathematics classroom: 1993 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics, 류희찬 외 5명(공역)(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics. NCTM.

Ⅴ. 교과서와 익힘책의 편찬 방향 및 구성



1. 교과서의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 기본적인 수학적 지식과 기능을 습득하여 논리적으로 사고하고, 사회나 자연의 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 키우며, 수학에 대한 긍정적 태도를 갖게 하는데 중점을 두어 교과서를 저술하였다. 특히, 익힘책과 연계를 긴밀히 하여 학교 교육 체계에 적합하도록 중단원 중심으로 저술하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 교과서의 편찬 방향은 다음과 같다.

가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.

나. 학생들의 발달 수준을 고려하여 내용을 이해하기 쉽게 구성하였다.

다. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.

라. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.

마. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.



2. 교과서의 구성과 활용 방법

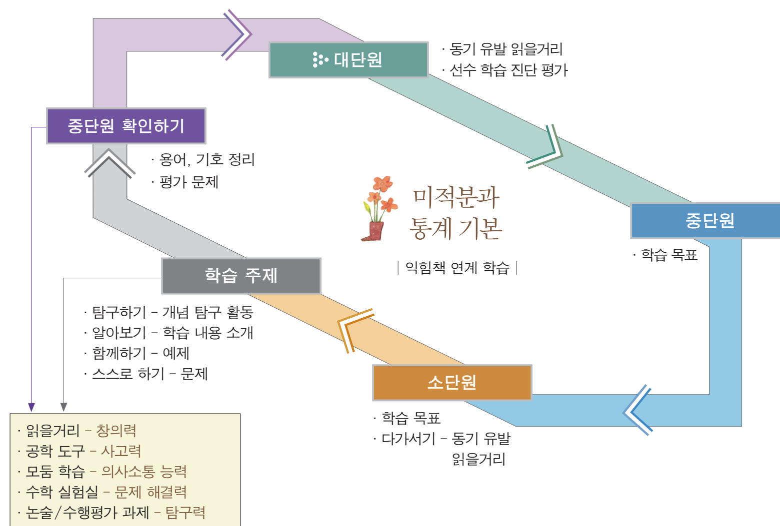
1) 교과서의 구성 체제

(1) 학습 주제의 연계성, 특성, 분량 등을 고려하여 교육과정에 제시된 영역별 내용을 분리하거나 통합하여 단원을 구성하고 배열하였다.

(2) 내용을 쉽게 이해할 수 있도록 충분한 설명을 제공하고, 예제, 문제 등을 적절히 제시하였다.

(3) 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합한 소재, 문제 등을 고르게 실었다.

2) 교과서의 단원 구성



3) 교과서의 활용 방법

(1) 단원 도입 및 동기유발

단원을 시작하기 전에

본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

단원을 시작하기 전에 …

분모의 유리화 — 1 다음 무리식의 분모를 유리화하여라.

(1) $\frac{1}{1-\sqrt{x+1}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$

함수의 정의역과 치역 — 2 다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\frac{x-1}{x}$ (2) $y=x^2+1$

다가서기

소단원 학습에 필요한 개념을 사진, 만화, 읽기 자료 등으로 표현하였다.

다 가 서 기 / 우주 왕복선과 비행 고도

탐구하기

소주제 학습의 실마리가 되는 내용을 실생활 또는 선수 학습에서 찾아보았다.

01 함수의 수렴과 발산

탐 구 하 기 / 계산기를 이용한 함숫값의 계산

(2) 내용 전개

알아보기_ 본 단원의 학습 주제와 연계되는 학습 내용을 확인하고 평가할 수 있도록 하였다.

함께하기_ 대표적인 문제를 해결하여 학습 내용을 정리하고 풀이 방법을 익히도록 하였다.

스스로 하기_ 스스로 문제를 해결하고 학습 내용을 점검할 수 있도록 하였다.
더 많은 문제를 풀어 보며 학습 내용을 확인할 수 있도록 익힘책과 연계하였다.

(3) 수학적 가치 함양

읽을거리

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.

읽을거리 — 댐의 설계와 적분법

공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.

공 학 도 구 — 함수의 극한값 확인하기

모둠 학습

주어진 주제에 대한 모둠 학습을 통하여 의사소통 능력을 향상시키고, 협동심을 기를 수 있도록 하였다.

모 둠 학 습

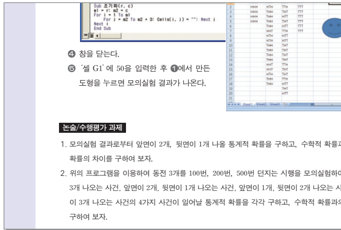
수학 실험실

실생활에서 찾을 수 있는 다양한 소재로 문제해결력을 기를 수 있도록 하였다.

수학 실험실 — 이분법(Bisection method)

논술/수행평가 과제

학습 내용의 이해를 바탕으로 조사, 분석, 관찰, 발표 등의 활동을 통하여 탐구력을 기를 수 있도록 하였다.



```
Sub 초기화(r, c)
m1 = r: m2 = c
For i = 1 To m1
    For j = m2 To m2 + 3: Cells(i, j) = "": Next j
Next i
End Sub
```

④ 창을 닫는다.
⑤ '셀 G1'에 50을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.

논술/수행평가 과제

1. 모의실험 결과로부터 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과
   확률의 차이를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여
   3개 나오는 사건, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건, 앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사
   이 3개 나오는 사건의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의
   구하여 보자.



3. 익힘책의 편찬 방향

2006년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞춘 자기주도적 학습에 중점을 두어 익힘책을 저술하였다. 특히, 교과서와 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 탐구력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 저술하였다. 익힘책의 편찬 방향은 다음과 같다.

가. 2006년 개정 교육과정을 충실히 반영하였다.
나. 교과서에서 습득한 지식과 기능을 적절히 활용할 수 있도록 하였다.
다. 내용을 이해하기 쉽게 구성하여 학생들의 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
라. 학생의 능력과 수준에 따른 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 하였다.
마. 수학적 개념의 이해와 기능의 습득을 바탕으로 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력을 신장시키는 데 적합하도록 하였다.
바. 수학적 지식과 방법을 통하여 생활 주변 현상, 자연 현상, 사회 현상 등을 이해하고 다양한 문제를 해결함으로써, 수학의 가치를 이해하고 수학에 대한 긍정적인 태도를 기르는 데 적합하도록 하였다.
사. 적절한 편집과 디자인을 활용하여 학습 효과를 높이도록 하였다.

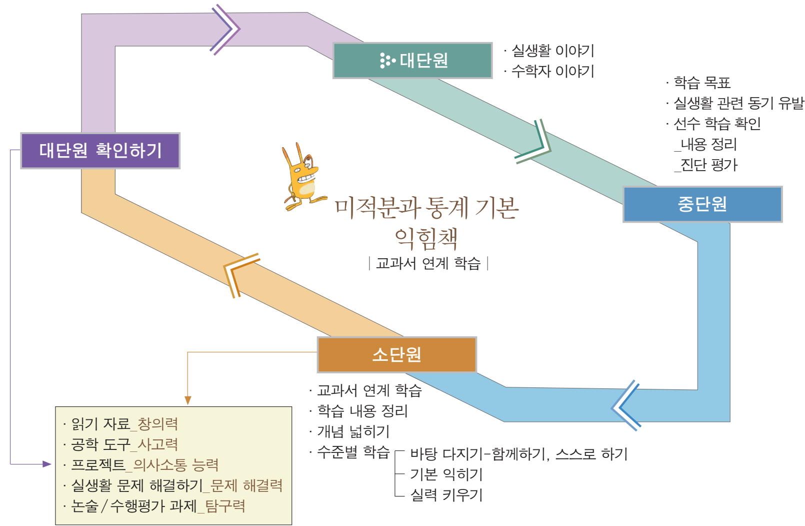


4. 익힘책의 구성과 활용 방법

1) 익힘책의 구성 체제

(1) 교과서의 내용과 유기적으로 연계하였고, 학생의 능력과 수준에 따라 수준별 교수 · 학습이 가능하도록 구성하였다.
(2) 수학적 탐구, 수학적 개념과 기능의 이해와 습득, 추론, 의사소통, 문제해결 등의 수학적 활동에 대한 반복 학습과 심화 학습의 기회를 제공하여 자기주도적 학습이 가능하도록 하였다.
(3) 단원의 도입 부분에서는 그 단원을 학습하는 데 필요한 선수 학습 내용을 제시하였고, 역사적 배경, 여러 가지 현상 등에 대한 읽기 자료를 적절히 소개하였다.
(4) 다양한 유형 및 난이도의 평가 문항을 제시하고, 그 평가 결과를 토대로 교수 · 학습을 향상시킬 수 있도록 하였다.
(5) 개별 학습이나 협력 학습을 통해 해결할 수 있는 프로젝트형 과제나 토론 과제를 제시하였다.

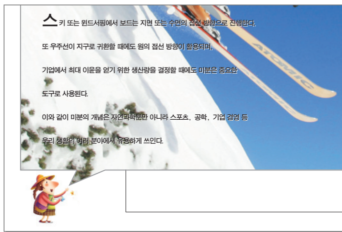
2) 익힘책의 단원 구성



(1) 단원도입 및 선수학습

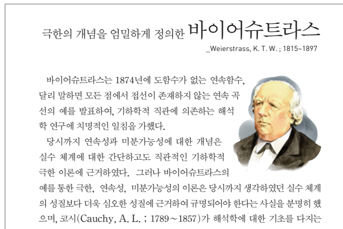
실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.



수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.



극한의 개념을 엄밀하게 정의한 바이어슈트라스

_Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897

바이어슈트라스는 1874년에 도함수가 없는 연속함수, 달리 말하면 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선의 예를 발표하여, 기하학적 직관에 의존하는 해석학 연구에 치명적인 일침을 가했다.

당시까지 연속성과 미분가능성에 대한 개념은 실수 체계에 대한 간단하고도 직관적인 기하학적 극한 이론에 근거하였다. 그러나 바이어슈트라스의 예를 통한 극한, 연속성, 미분가능성의 이론은 당시까지 생각하였던 실수 체계의 성질보다 더욱 심오한 성질에 근거하여 규명되어야 한다는 사실을 분명히 했으며, 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)가 해석학에 대한 기초를 다지는

~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.

함수의 극한에 들어가기 전에

1. 수열의 극한

무한수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

또 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 이 수열은 발산한다고 한다.

2. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ 일 때

1 다음 수열의 수
조사하여라.
(1) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
(2) $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$
(3) $\{1+(-1)^n\}$
(4) $\{n^2+1\}$

2 두 무한수열 $\{a_n\}$,
$\lim_{n\to\infty} a_n=2$, lim
음 극한값을 구하
(1) $\lim (2a_n+b$

(2) 교과서와 연계된 학습

학습 내용 정리_ 교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_ 교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화학습이 가능하도록 하였다.

(3) 자기 주도적 학습 방법

바탕 다지기_ 함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충학습이 가능하도록 하였다.

기본 익히기_ 기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_ 학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

⑷ 수학적 가치 함양

읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.


읽기 자료

자연 속의 중간값의 정리

자연 현상이나 일상생활에는 연속인 함수로 표현할 수 있는 것들이 많이 있다.
기온이나 물체의 속도는 시간에 따라 연속적으로 변하므로 닫힌 구간에서 연속인 함수로 나
수 있으며 그 함수에 대하여 중간값의 정리가 성립한다.
북극과 남극의 기온은 영하의 낮은 온도이고 적도 부근의 기온은 영상의 높은 온도이다. 그러
알래스카 위쪽의 북극으로부터 태평양 연안의 해안선을 따라 칠레 아래쪽의 남극까지 이동하
온은 영하에서 시작하여 영상으로, 그리고 다시 영하로 연속적으로 변하게 된다.
따라서 중간값의 정리를 이용하면 북아메리카 해안과 남아메리카 해안에는 서로 기온이

공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.

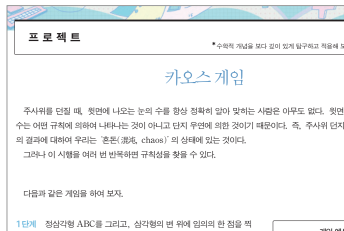

공학 도구

컴퓨터로 함수의 접선 그리기

기하 작도용 소프트웨어인 C.a.R.를 이용하면 함수의 그래프와 접선을 쉽게 그릴
소프트웨어는 C.a.R. 홈페이지(http://zirkel.sourceforge.net)에서 내려받
방법1 C.a.R.를 이용하여 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$ 위의 한 점에서의 접선을
1단계 함수 아이콘 f(x) 을 클릭하면 |그림1| 과 같은 함수 창이 열린다. 함수 창의 '
'y좌표를 나타내는 식'에 'x^4−x^3−2*x^2−x+2'를 입력한 후 확인
|그림2| 와 같이 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 그래프가 그려진다.

프로젝트

수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.


프로젝트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보

카오스 게임

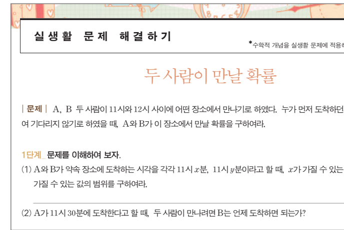
주사위를 던질 때, 윗면에 나오는 눈의 수를 항상 정확히 알아 맞히는 사람은 아무도 없다. 윗면
수는 어떤 규칙에 의하여 나타나는 것이 아니고 단지 우연에 의한 것이기 때문이다. 즉, 주사위 던지
의 결과에 대하여 우리는 '혼돈(混沌, chaos)'의 상태에 있는 것이다.
그러나 이 시행을 여러 번 반복하면 규칙성을 찾을 수 있다.

다음과 같은 게임을 하여 보자.

1단계 정삼각형 ABC를 그리고, 삼각형의 변 위에 임의의 한 점을 찍

실생활 문제 해결하기

문제해결 전략을 활용하여 실생활의 문제해결력을 기르도록 하였다.


실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해

두 사람이 만날 확률

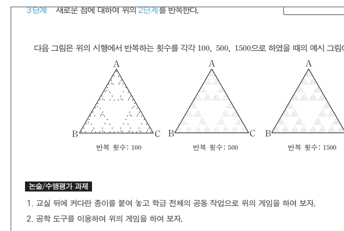
| 문제 | A, B 두 사람이 11시와 12시 사이에 어떤 장소에서 만나기로 하였다. 누가 먼저 도착하던지
여 기다리지 않기로 하였을 때, A와 B가 이 장소에서 만날 확률을 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.
(1) A와 B가 약속 장소에 도착하는 시각을 각각 11시 x분, 11시 y분이라고 할 때, x가 가질 수 있는 값
가질 수 있는 값의 범위를 구하여라.

(2) A가 11시 30분에 도착한다고 할 때, 두 사람이 만나려면 B는 언제 도착하면 되는가?

논술/수행평가 과제

학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.


3단계 새로운 점에 대하여 위의 2단계를 반복한다.

다음 그림은 위의 시행에서 반복하는 횟수를 각각 100, 500, 1500으로 하였을 때의 예시 그림이

논술/수행평가 과제

1. 교실 뒤에 커다란 종이를 붙여 놓고 학급 전체의 공동 작업으로 위의 게임을 하여 보자.
2. 공학 도구를 이용하여 위의 게임을 하여 보자.

⑸ 학습 평가

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로써 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

정기고사 방식의 평가

선다형, 단답형, 서술형 등의 다양한 평가 문항을 수록하고, 또 채점 기준을 제시하여 자율 학습에 도움이 되도록 하였다.



계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

컴퓨터를 활용할 수 있는 문제이다.

Ⅵ. 지도 계획 및 교수 · 학습 지도안 예시



1. 미적분과 통계 기본 1학기 대단원별 지도 계획

미적분과 통계 기본에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 대단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	교과서 쪽	시간 배당	차시
Ⅰ 함수의 극한과 연속	1. 함수의 극한	8~26	10	1~10
	2. 함수의 연속	27~39	5	11~15
	소계		15	
Ⅱ 다항함수의 미분법	1. 미분계수와 도함수	40~60	10	16~25
	2. 도함수의 활용	61~81	11	26~36
	소계		21	
Ⅲ 다항함수의 적분법	1. 부정적분과 정적분	82~106	11	37~47
	2. 정적분의 활용	107~117	7	48~54
	소계		18	
Ⅳ 확률	1. 조합	118~130	7	55~61
	2. 확률의 뜻과 활용	131~144	8	62~69
	3. 조건부확률	145~153	6	70~75
	소계		21	
Ⅴ 통계	1. 확률분포	154~190	18	76~93
	2. 통계적 추정	191~207	9	94~102
	소계		27	
합계			102	



2. 미적분과 통계 기본 1학기 소단원별 지도 계획

미적분과 통계 기본에 배정된 1학기 수업 시간 수인 102시간(주당 6시간×17주)을 기준으로 익힘책을 포함하여 소단원별 지도 계획을 작성한 것이다.

대단원	중단원	소단원	지도 내용	용어 및 기호	교과서 쪽	시간 배당
Ⅰ 함수의 극한과 연속	1. 함수의 극한	1. 함수의 수렴과 발산	함수의 극한의 뜻을 알게 한다. 함수의 수렴과 발산, 좌극한과 우극한을 이해하게 한다.	$\lim_{x \to a} f(x)$, 좌극한, 우극한, $\lim_{x \to a-0} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$	8~19	5
		2. 극한값의 계산	함수의 극한에 대한 성질을 이해하게 한다. 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다. 함수의 극한의 대소 관계를 이해하게 한다.		20~25	4
		중단원 확인하기			26	1
	2. 함수의 연속	1. 함수의 연속	함수의 연속의 뜻을 알게 한다. 연속함수의 성질을 이해하게 한다. 연속함수의 성질을 활용할 수 있게 한다.	연속, 불연속, 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌 구간, 반열린 구간, 연속함수, 최대 · 최소의 정리, 중간값의 정리, $[a,\ b]$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$, $(a,\ b)$	27~37	4
		중단원 확인하기, 수학 실험실			38~39	1
Ⅱ 다항함수의 미분법	1. 미분계수와 도함수	1. 미분계수	평균변화율과 미분계수의 뜻을 알게 하고, 그 값을 구할 수 있게 한다. 미분계수의 기하학적 의미를 알게 한다. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하게 한다.	증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$	40~53	6
		2. 도함수의 정의와 미분법	도함수의 정의를 알게 하고, 정의에 따라 도함수를 구할 수 있게 한다. 상수함수와 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있게 한다. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법의 공식을 유도하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 다항함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.		54~59	3
		중단원 확인하기			60	1

Ⅱ 다항함수의 미분법	2. 도함수의 활용	1. 그래프에의 활용	도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다. 도함수를 활용하여 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정할 수 있게 한다. 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있게 한다. 도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.	증가, 감소, 극대, 극댓값, 극소, 극솟값, 극값	61~71	6
		2. 방정식과 부등식에의 활용	함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다. 도함수를 이용하여 부등식을 증명할 수 있게 한다.		72~75	2
		3. 속도와 가속도에의 활용	도함수를 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있게 한다.		76~79	2
		중단원 확인하기, 수학 실험실			80~81	1
Ⅲ 다항함수의 적분법	1. 부정적분과 정적분	1. 부정적분	부정적분의 뜻을 알게 한다. x^n의 부정적분을 구할 수 있게 한다. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알게 하고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.	부정적분, 원시함수, 피적분함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 아래끝, 위끝, 정적분의 기본정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\Big[F(x)\Big]_a^b$	82~91	3
		2. 정적분	구분구적법을 이해하게 하고, 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다. 정적분의 뜻을 알게 한다. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하게 하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.		92~104	7
		중단원 확인하기, 읽을거리			105~106	1
	2. 정적분의 활용	1.정적분의 활용	곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.		107~115	6
		읽을거리, 중단원 확인하기			116~117	1

Ⅳ 확 률	1. 조합	1. 중복조합	중복조합의 뜻을 알게 한다. 조합의 수를 구할 수 있게 한다.	중복조합, 이항정리, 이항계수	118~124	3
		2. 이항정리	이항정리의 뜻을 알게 한다. 이항정리의 성질을 이해하게 한다.		125~128	3
		중단원 확인하기, 수학 실험실			129~130	1
	2. 확률의 뜻과 활용	1. 확률의 뜻과 기본 성질	시행의 뜻을 이해하게 한다. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미와 관계를 이해하게 한다. 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.	시행, 수학적 확률, 통계적 확률, $\mathrm{P}(A)$, 배반사건, 여사건	131~139	4
		2. 확률의 계산과 활용	배반사건의 뜻을 알게 한다. 확률의 덧셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 여사건의 뜻을 알게 한다. 여사건의 확률을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.		140~143	3
		중단원 확인하기			144	1
	3. 조건부확률	1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리	조건부확률의 뜻을 알게 하고, 이를 구할 수 있게 한다. 확률의 곱셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다. 독립시행의 뜻을 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.	조건부확률, 독립, 종속, 독립시행, $\mathrm{P}(B\|A)$	145~152	5
		중단원 확인하기			153	1
Ⅴ 통 계	1. 확률분포	1. 확률변수와 확률분포	확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다. 이산확률변수와 연속확률변수의 뜻을 알게 하고, 확률질량함수의 성질을 이해하게 한다.	확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준정규분포, 표준화, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n, p)$, $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$	154~164	4
		2. 평균과 표준편차	이산확률변수의 뜻을 알게 하고, 기댓값(평균)과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다. 연속확률변수의 뜻을 알게 하고, 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.		165~173	5
		3. 이항분포	이항분포의 뜻을 알게 하고, 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다. 큰 수의 법칙을 이해하게 한다.		174~180	3
		4. 정규분포	정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다. 표준정규분포의 뜻을 알게 하고, 표준정규분포표를 활용할 수 있게 한다. 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하게 한다.		181~189	5
		중단원 확인하기			190	1

	2. 통계적 추정	1. 표본조사와 표본평균의 분포	모집단과 표본의 뜻을 알게 한다. 전수조사와 표본조사의 뜻을 알게 한다. 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 알게 한다. 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.	모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\overline{X}$	191~201	5
		2. 모평균의 추정	추정의 뜻을 알게 한다. 모평균을 추정할 수 있게 한다.		202~206	3
		중단원 확인하기			207	1
합계						102



3. 교수 · 학습 지도안 예시

01 단원명

(1) 대단원: Ⅲ 다항함수의 적분법

(2) 중단원: Ⅲ－2. 정적분의 활용

(3) 소단원: Ⅲ－2－1. 정적분의 활용

(4) 수업내용: 01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

02 지도 계획

(1) 지도의 목표

① 정적분을 이용하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

(2) 지도상의 유의점

① 함수의 그래프를 이해하여 정적분의 결과가 음수가 되는 경우도 넓이를 구할 수 있도록 지도한다.

② 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $y=f(x)$가 항상 양인 것은 아니므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$임을 강조한다.

(3) 지도과정

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동 (교사)	교수 · 학습 활동 (학생)	유의점 및 자료	시간
도입	전시 학습 내용 확인	• 인사 및 출석 확인 • 전 시간에 학습한 내용 확인 [정적분의 성질] ① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수) ② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ ③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$ ④ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$	• 인사 • 전시 학습 내용에 대한 질문에 답한다.	교과서 익힘책 색분필	
	본시 학습 목표 제시	• 이번 시간에는 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.	• 본시 학습 목표를 주시한다.		5분

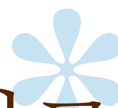
학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
전개	탐구하기	두 함수 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=x^3-3x^2-x+3$ 에 대하여 다음 물음에 답하여 보자. 1. 오른쪽 좌표평면 위에 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그려라.	• 학생들은 각자 풀어 본다. (풀이) 1. $f(x)=x(x-2)$ $g(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$ 이므로 그래프를 그리면 다음과 같다. $y=f(x)$ y 4 2 -4 -2 O 2 4 x -2 $y=g(x)$ -4		
		2. 각 함수에 대하여 함숫값이 0 이상이 되는 구간을 구하여라.	2. $f(x)\geq 0$인 구간은 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$ $g(x)\geq 0$인 구간은 $-1\leq x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$		
	알아보기	• 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자. y $y=f(x)$ S O a b x 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때 넓이 S는 $S=\int_a^b f(x)dx$이다. 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때, 넓이 S는 다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축에 대하여 대칭인 곡선 $y=-f(x)$를 적분하면 된다. 즉, $S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$이다. y $y=-f(x)$ S O a S b x $y=f(x)$	• 경청하며 질문에 답한다.		
		위와 같은 방법으로 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$이고, 구간 $[c, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때 넓이 S는 $S=\int_a^c \{-f(x)\}dx+\int_c^b f(x)dx$ $=\int_a^c \lvert f(x)\rvert dx+\int_c^b \lvert f(x)\rvert dx$ $=\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	• 칠판을 주시하며 질문에 답한다.		

학습 단계	학습 요소	교수 · 학습 활동		유의점 및 자료	시간
		교사	학생		
	함께하기	곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. (풀이) $f(x)=x^2-2x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)=x^2-2x\geq 0$ 이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x^2-2x\leq 0$이므로 $S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx$ $=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\mathbf{2}$	• 설명을 들으며 질문에 답한다.	•순회하며 개별 질문을 받는다.	
	스스로 하기	문제1. 다음 곡선과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. (1) $y=(x+1)(x-2)$ (2) $y=\frac{1}{2}x^2-4$ (3) $y=x(x+2)(x-4)$ (4) $y=x^3-5x^2-6x$	• 지명된 학생은 칠판에 풀고 다른 학생은 공책에 푼다. (풀이) 구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)\leq 0$이므로 (1) $S=\int_{-1}^{2}\lvert(x+1)(x-2)\rvert dx$ $=\int_{-1}^{2}\{-(x+1)(x-2)\}dx=\frac{9}{2}$ (2) $S=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx=\frac{21}{2}$ 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\leq 0$이므로 (3) $S=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-8x)dx$ $+\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2+8x)dx=\frac{245}{12}$ (4) $S=\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx$ $+\int_{0}^{2}\{-x^3+5x^2+6x)dx=\frac{269}{12}$		35분
형성 평가	문제 (익힘책 83쪽)	1. 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. (1) $y=x(x-1)$ (2) $y=-x(x-2)$	(풀이) (1) $S=\int_{0}^{1}\lvert x(x-1)\rvert dx=\frac{1}{6}$ (2) $S=\int_{0}^{2}\lvert -x(x-2)\rvert dx=\frac{4}{3}$		5분
정리 및 차시 예고	정리	• 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_{a}^{b}\lvert f(x)\rvert dx$	• 질문에 답한다.		
	과제 제시	• 다음 시간까지 수준별로 익힘책의 '바탕 다지기(83쪽)의 2번, 3번+기본 익히기(84쪽)의 1번, 2번, '기본 익히기', '실력 키우기'를 풀이하여 제출할 것.			
	차시 예고	• 다음 시간에는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이에 대하여 공부한다.	• 차시 확인 및 인사		5분





nd part ›››



단원별 지도 자료

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

01 단원의 목차

1. 함수의 극한

1. 함수의 수렴과 발산
   - 01 함수의 수렴과 발산
   - 02 좌극한과 우극한
2. 극한값의 계산
   - 01 함수의 극한에 대한 성질
   - 02 함수의 극한값의 계산
   - 03 함수의 극한의 대소 관계

2. 함수의 연속

1. 함수의 연속
   - 01 함수의 연속성
   - 02 연속함수의 뜻
   - 03 연속함수의 성질
   - 04 최대 · 최소의 정리
   - 05 중간값의 정리

02 단원의 지도 목표

1. 함수의 극한

① 주어진 점에서 함숫값의 수렴과 발산의 정의를 통하여 함수의 극한의 뜻을 알게 한다.

② 함수의 극한에 관한 성질을 이해하게 한다.

③ 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

2. 함수의 연속

① 구간의 뜻을 알게 하고, 이를 기호로 나타낼 수 있게 한다.

② 함수의 연속의 뜻을 알게 한다.

③ 연속함수의 성질을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 함수의 극한 개념은 수열의 극한 개념과 관련시켜 도입하고, 구체적인 예와 그래프를 사용하여 직관적으로 이해하도록 지도한다.

② 일반적으로 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$가 성립하는 것은 아니며, 우극한과 좌극한이 반드시 일치하는 것도 아님을 유의하도록 지도한다.

③ 함수의 극한에 대한 성질은 증명 없이 직관적으로 이해시키도록 하고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.

④ 극한값을 직접 구할 수 없는 경우라도 극한값을 구할 수 있도록 변형하는 방법을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있도록 지도한다.

⑤ $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속임은 다음과 같이 세 단계로 나누어 이해시키는 것이 바람직하다.

(i) $f(a)$가 존재　　(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

⑥ 연속함수의 성질을 직관적으로 이해시키도록 한다.

04 단원의 이론적 배경

함수의 극한과 연속성을 $\varepsilon-\delta$ 논법으로 정의하고, 그와 관련된 기본적인 성질들을 유도해 보자.

1. 함수의 극한

다음이 성립할 때, '$x=a$에서 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다.' 고 한다.

"임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$이다."

이때, α를 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한(limit)이라 하고, 이를 기호 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$로 나타낸다.

위의 정의의 '$0<|x-a|<\delta$이면' 에서 x는 $f(x)$의 정의역 E에 속하는 경우에만 의미가 있다.

그러므로 양수 δ에 따라 그런 x가 반드시 존재함을 보장하기 위해서 $x=a$가 E의 집적점인 경우, 즉 $x=a$의 임의의 근방에 a 이외의 E의 원소가 포함되는 경우만을 생각한다. (이때, $a \notin E$일 수 있다.)

그런데 고등학교에서 다루는 함수의 정의역은 일반적으로 구간 또는 구간들의 합집합이다. 이런 경우에 정의

역을 이루는 각 구간의 모든 점과 구간의 끝점들이 정의역의 집적점이고, 이런 점에서 함수의 극한을 생각할 수 있다. 앞으로의 논의는 바로 이런 경우에 적용된다.

먼저, 함수의 극한의 유일성을 알아보자.

> 정리 1 _ $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한이 존재하면 그 값은 유일하다.

증명 _ 서로 다른 두 실수 α와 β가 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한이라 하고, $|\alpha-\beta|=2\varepsilon$이라고 하자.
그러면 ε이 양수이므로 적당한 양수 δ_1과 δ_2가 존재하여 다음이 성립한다.

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$
$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-\beta|<\varepsilon$$

이제, δ_1과 δ_2 중에서 작은 수를 δ라고 하면
$0<|x-a|<\delta$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=|(\alpha-f(x))+(f(x)-\beta)|\\&\le|f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta|<2\varepsilon\end{aligned}$$

이는 모순이다. 따라서 함수의 극한은 유일하다.

이제, 함수의 극한과 수열의 극한 사이의 관계를 알아보자.

> 정리 2 _ $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이기 위한 필요충분조건은 점 a에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$이다. (단, $a_n\ne a$)

증명 _ $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$라 하고, 수열 $\{a_n\}$이 점 a에 수렴한다고 하자. (단, $a_n\ne a$)
그러면 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 다음이 성립한다.

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$이므로 위의 양수 δ에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 다음이 성립한다.

$$n>N \Rightarrow 0<|a_n-a|<\delta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠과 ㉡에 의하여 $n>N$이면 $|f(a_n)-\alpha|<\varepsilon$이므로 $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$이다.

이제, 역을 증명하기 위하여 점 a에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha$이지만, $\lim_{x\to a} f(x)\ne\alpha$라고 하자.
그러면 적당한 양수 ε이 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $0<|x-a|<\delta$이지만 $|f(x)-\alpha|\ge\varepsilon$이 성립하는 x가 있다.
이러한 x는 δ에 따라 결정되고, 각 자연수 n에 대하여 $\delta=\dfrac{1}{n}$을 택할 수 있으므로 다음과 같은 x_n이 존재한다.

$$0<|x_n-a|<\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n)-\alpha|\ge\varepsilon$$

이와 같이 수열 $\{x_n\}$은 a에 수렴하지만 $\{f(x_n)\}$은 α에 수렴하지 않으므로 이는 가정에 위배된다.
따라서 위의 정리가 성립한다.

2. 함수의 연속성

다음이 성립할 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

"임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$이다."

위의 정의에 따라 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이기 위해서 반드시 $f(a)$가 정의되어야 한다.
그리고 $x=a$가 정의역의 집적점일 때, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$임을 알 수 있다.
(사실, 함수 $f(x)$의 정의역이 구간 또는 구간들의 합집합인 경우에는 정의역의 모든 원소가 그 정의역의 집적점이므로 이 정의로 충분하다.)
$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$를 $\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)$와 같이 쓸 수 있는데, 이는 극한 기호 $\lim_{x\to a}$와 함수 기호 f를 교환할 수 있음을 보여준다.
한편, 점 $x=c$가 함수 $f(x)$의 정의역에 속하지만 정의역의 고립점(isolated point)이면, 즉 적당한 양수 δ가 존재하여 $|x-c|<\delta$를 만족시키는 정의역의 원소가 $x=c$뿐이면 위의 정의에 따라 분명히 $f(x)$는 $x=c$에서 연속이다. (이에 따라 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수인 수열은 정의역의 모든 점에서 연속이다.)

Ⅱ. 다항함수의 미분법

01 단원의 목차

1. 미분계수와 도함수

1. 미분계수
    - 01 평균변화율
    - 02 미분계수
    - 03 미분계수의 기하학적 의미
    - 04 미분가능성과 연속성
2. 도함수의 정의와 미분법
    - 01 도함수의 뜻
    - 02 미분법의 공식(1)
    - 03 미분법의 공식(2)

2. 도함수의 활용

1. 그래프에의 활용
    - 01 접선의 방정식
    - 02 함수의 증가와 감소
    - 03 함수의 극대와 극소
    - 04 함수의 그래프의 개형
2. 방정식과 부등식에의 활용
    - 01 방정식에의 활용
    - 02 부등식에의 활용
3. 속도와 가속도에의 활용
    - 01 속도와 가속도

02 단원의 지도 목표

1. 미분계수와 도함수

① 평균변화율과 미분계수의 뜻을 알게 하고, 그 값을 구할 수 있게 한다.

② 정의를 이용하여 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있게 한다.

③ 미분계수의 기하학적 의미를 이해하게 한다.

④ 그래프를 통하여 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하도록 지도한다.

⑤ 도함수의 정의를 알게 하고, 정의에 따라 도함수를 계산할 수 있게 한다.

⑥ 상수함수와 함수 $y=x^n$(n은 자연수)의 도함수를 구할 수 있게 한다.

⑦ 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법의 공식을 유도하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

⑧ 다항함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

2. 도함수의 활용

① 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판정하고, 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있게 한다.

③ 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

④ 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

⑤ 도함수를 이용하여 부등식을 증명할 수 있게 한다.

⑥ 도함수를 활용하여 속도와 가속도에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 평균속도에서 시간을 짧게 하면 순간속도가 됨을 직관적으로 이해하게 하여 평균변화율의 극한이 순간변화율 즉, 미분계수임을 알 수 있도록 지도한다.

② 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 점 $(a, f(a))$에서 접선이 존재하고, 역으로 점 $(a, f(a))$에서 접선이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능함을 알게 한다.

③ 미분가능하면 반드시 연속이고, 그 역은 성립하지 않음을 강조한다.

④ 도함수를 구하고자 할 때는 공식을 이용하는 편이 능률적임을 알게 하고, 공식의 암기뿐만 아니라 공식이 유도되는 과정을 바르게 파악하도록 지도한다.

⑤ 주어진 점을 지나는 접선의 방정식을 구할 때는 그 점이 곡선 위의 점인지 아닌지에 따라 접선을 구하는 방법이 다르므로 유의하여 지도한다.

⑥ 어떤 구간에서 함수가 '증가한다' 또는 '감소한다'는 뜻을 이해하게 하고, 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단할 수 있도록 지도한다.

⑦ 다항함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(a)$는 극값이지만, 비록 $f'(a)=0$일지라도 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으면 $f(a)$는 극값이 아님을 강조하여 지도한다.

⑧ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수와 실근의 범위, 실근의 부호를 판별할 수 있게 한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 미분법과 적분법의 발견

수학의 발전에 있어서 17세기는 괄목할만한 시기였는데 가장 큰 업적이 미적분의 발견이다. 우리는 미분을 먼저 배우고 적분을 나중에 배우지만 역사적으로는 적분이 먼저 발달하였다.

적분은 고대부터 넓이, 부피, 호의 길이를 구하는 수단으로 개발되었고, 미분은 곡선의 접선과 움직이는 물체의 운동을 기술하기 위하여 17세기에 시작되었다. 17세기 말에 이르러 미분과 적분은 서로 역연산 관계임을 알게 되었다.

미적분은 뉴턴(Newton, I.; 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G.W.; 1646~1716)에 의하여 거의 동시에 발견되었다. 미분과 적분의 발견을 둘러싸고 유럽 대륙과 영국 사이에는 오랫동안 논쟁이 계속되었으나 오늘날에는 두 사람이 각각 독자적으로 발견했다고 인정한다.

뉴턴은 1687년 완성된 그의 저서 '프린키피아'에서 유율이라는 미분을 소개하였는데 이 유율법은 뉴턴이 1665년에 발견했다고 한다. 또 뉴턴은 미분과 적분을 이용하여 만유인력의 법칙을 유도하고 역학의 원리를 완성시켰다. 미분에 관한 체계적인 전개는 1704년 발표한 논문 '곡선의 구적에 관하여'와 뉴턴이 죽은 후 출판된 저서 '유율과 무한급수'에서 나타난다.

라이프니츠는 1676년에 미분과 적분을 고안하였으며, 1684년에 미분법을 발표하고 1686년에 적분법을 발표하였다. 라이프니츠는 적분이 미분의 역연산임을 알았고, 자신만의 기호법을 도입하여 보편화된 계산법으로서의 미분법과 적분법을 확립시켰다.

한편, $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$를 구하는 정식화된 미분법은 코시에 의하여 만들어졌다.

2. 극대 · 극소를 구하는 페르마의 방법

뉴턴 이전의 미분에 관한 연구로는 페르마(Fermat, P.; 1601~1665)가 고안한 다항함수 $f(x)$의 극대점과 극소점을 찾아내는 페르마의 방법이 있다.

페르마는 극대점과 극소점에서는 접선이 수평이 되어야 한다는 사실에 착안하여 다음 식을 생각하였다.

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

좌변의 분자를 전개하여 E로 나눈 다음 $E=0$으로 놓고 방정식을 풀어서 극점의 x좌표를 구하였다. 이것은 결국 다음을 만족시키는 x를 구한 것과 같다.

$$f'(x)=\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

3. 뉴턴의 미분법

동점 P가 움직인 거리 x와 걸린 시간 t 사이에 $x=t^3$의 관계가 있을 때 점 P의 속도를 구하기 위하여 뉴턴은 다음과 같은 방법을 사용하였다.

작은 증가를 0을 써서 나타내면 시간 t가 t_0에서 t_0+0이 될 때 점 P가 움직인 거리 x는 t_0^3에서 $(t_0+0)^3=t_0^3+3\cdot t_0^2\cdot 0+3\cdot t_0\cdot 0^2+0^3$이 된다. 이때, t가 0만큼 증가할 때 움직인 거리는 $3t_0^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3$이므로 움직인 거리와 증가한 양의 비는 다음과 같다.

$3t_0^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3 : 0=3t_0^2+3t_0\cdot 0+0^2 : 1$ ……㉠

㉠의 우변에서 0은 한없이 작다고 생각하여 0이 곱해진 항을 없애면 $3t_0^2 : 1$이 되므로 점 P의 시간 t_0에서의 속도는 $3t_0^2$이다.

Ⅲ. 다항함수의 적분법

01 단원의 목차

1. 부정적분과 정적분
   1. 부정적분
      - 01 부정적분
      - 02 x^n의 부정적분
      - 03 부정적분의 성질
   2. 정적분
      - 01 구분구적법
      - 02 정적분
      - 03 정적분의 기본 정리
      - 04 정적분의 성질
2. 정적분의 활용
   1. 정적분의 활용
      - 01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이
      - 02 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이
      - 03 속도와 거리

02 단원의 지도 목표

1. 부정적분과 정적분

① 부정적분의 뜻을 알게 한다.

② x^n의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

③ 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알게 하고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

④ 구분구적법을 이해하게 하고, 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다.

⑤ 정적분의 뜻을 알게 한다.

⑥ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하게 하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

2. 정적분의 활용

① 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

② 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

③ 정적분을 이용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 미분과 적분 사이의 관계는 역연산임을 강조하여 지도한다.

② 구분구적법은 정적분의 정의를 이해하는 데 그 목적이 있으므로 깊게 다루지 않도록 한다.

③ 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 $f(x)$와 아래끝 a, 위끝 b에 의하여 결정되므로 변수 x와는 무관함을 강조한다.

④ 정적분 $\int_a^b f(x)dx$가 부정적분 $F(x)$와 $\int_a^b f(x)dx=F(x)+C$인 관계가 있음을 말해 주는 정적분의 기본 정리를 사용하여 정적분의 계산이 편리함을 알게 한다.

⑤ 함수의 그래프를 이해하여 정적분의 결과가 음수가 되는 경우에도 넓이를 구할 수 있도록 지도한다.

⑥ x의 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피 V_x와 y의 구간 $[c,\ d]$에서 곡선 $x=g(y)$를 y축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피 V_y를 구하는 식을 이해시키도록 한다.

⑦ 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$일 때의 위치가 x_0일 때, 시각 $t=b$일 때의 위치 $x(t)$는 $\int_a^b v(t)dt$가 아니라 $x(t)=x_0+\int_a^b v(t)dt$임을 강조한다.

04 단원의 이론적 배경

고등학교에서 배우는 적분은 코시 적분이다. 이 적분은 연속함수와 (불연속점이 유한 개인) 구분적 연속함수를 다루기에 적절하다.

그런데 리만(Riemann, G.F.B.; 1826~1866)은 좀더 일반적인 함수, 이를테면 임의의 유한 구간에 불연속점이 무수히 많은 함수의 적분에 대한 논문을 1852년경에 썼다. 그러나 이 논문은 그가 죽은 뒤인 1867년에 발표되었다. 이 논문의 '삼각급수에 의한 함수의 표현에 대하여' 에는 각 소구간에서 임의로 선택한 점 $\eta_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$에 대하여 다음 값을 생각하였다.

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k^*) \Delta x_k$$

그리고 Δx_k의 최댓값이 0에 수렴할 때 S가 일정한 값 V에 수렴하면, 즉 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 Δx_k의 최댓값이 δ보다 작은 모든 분할에 대하여 $|S-V| < \varepsilon$이면, 함수 f는 구간 $[a, b]$에서 (리만)적분가능하다라 하고, 이를 기호 $V = \int_a^b f(x)dx$로 나타내었다.

리만의 정의는 코시의 정의와 매우 유사하다. 그러나 코시가 연속함수에서 출발한 반면에 리만은 유계인 함수에서 출발했고, 소구간의 한쪽 끝점을 선택한 코시와 달리 리만은 소구간의 임의의 점을 선택했다.

이렇게 리만 적분은 융통성이 커졌으며, 특히 이것은 적분의 존재에 대한 필요충분조건을 확립할 수 있게 했다. (여기서 제시한 리만 적분의 정의와 동치이지만 리만 상합과 리만 하합을 이용하여 적분을 정의하는 방법이 있다. 그런 정의에서 리만 적분가능하기 위한 필요충분조건은 임의의 양수 ε에 대하여 상합과 하합의 차가 ε보다 작은 분할이 존재하는 것이다.)

또 유계인 폐구간 위에서 연속함수는 리만 적분가능하고, 이때 코시와 리만 적분값은 서로 일치한다. 단조함수는 (불연속점이 무수히 많더라도) 리만 적분가능함을 증명할 수 있다.

코시 적분에 비하여 리만 적분은 더 넓은 범위의 함수를 다룰 수 있게 한다. 그러나 다음과 같은 디리클레 함수는 리만 적분가능하지 않다.

$$f : [0, 1] \longrightarrow R,\ f(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

집합론에서 알 수 있듯이, 유리수의 집합은 가산집합이고 무리수의 집합은 비가산집합으로, 무리수는 유리수와 비교할 수 없을 만큼 많이 존재한다. 또 르베그(Lebesgue, H. L.; 1875~1941)의 측도(measure)에 따르면 구간 [0, 1]에서 유리수 집합의 측도는 0이고 무리수 집합의 측도는 1이다. 그러므로 0부터 1까지 디리클레 함수의 적분값이 0이 되는 것이 수학적으로 합당하다.

이와 같이 디리클레 함수도 다룰 수 있도록, 적분가능한 함수의 범위를 더욱 넓게 확장시킨 것이 바로 1901년에 발표된 르베그 적분이다. 리만 적분의 약점을 보완한 르베그 적분은 이론다운 최초의 적분 이론으로 평가받고 있으며 현대 해석학의 기초를 이루고 있다.

Ⅳ. 확률

01 단원의 목차

1. 조합

1. 중복조합
   - 01 중복조합의 뜻
   - 02 중복조합의 수
2. 이항정리
   - 01 이항정리의 뜻
   - 02 이항정리의 성질

2. 확률의 뜻과 활용

1. 확률의 뜻과 기본 성질
   - 01 시행의 뜻
   - 02 수학적 확률
   - 03 통계적 확률
   - 04 확률의 기본 성질
2. 확률의 계산과 활용
   - 01 확률의 덧셈정리
   - 02 여사건의 확률

3. 조건부확률

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

01 조건부확률의 뜻

02 확률의 곱셈정리

03 사건의 독립과 종속

04 독립시행

02 단원의 지도 목표

1. 조합

① 중복조합의 뜻을 알게 하고, 중복조합의 수를 구할 수 있게 한다.

② 이항정리의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

2. 확률의 뜻과 활용

① 시행의 뜻을 이해하게 한다.

② 수학적 확률과 통계적 확률의 뜻을 알게 하고, 그 관계를 이해하게 한다.

③ 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.

④ 배반사건의 뜻을 알게 한다.

⑤ 확률의 덧셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

⑥ 여사건의 뜻을 알게 한다.

⑦ 여사건의 확률을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

3. 조건부확률

① 조건부확률의 뜻을 알게 하고, 이를 구할 수 있게 한다.

② 확률의 곱셈정리를 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다.

④ 독립시행의 뜻을 알게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 중복조합과 이항정리는 개념을 이해하는 정도로 간단히 다룬다.

② 뺄셈은 덧셈으로 바꾸어 이항정리를 적용할 수 있음을 이해시키도록 한다.

③ 수학적 확률과 통계적 확률의 정의를 알고 이를 구할 수 있도록 지도한다.

④ 확률의 기본 성질을 이해시키도록 한다.

⑤ 확률의 계산에서 복잡한 경우는 다루지 않는다.

⑥ 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$에서 $\mathrm{P}(A)\neq 0$인 경우에 한하여 정의된다는 것을 강조한다.

⑦ 독립시행의 확률은 통계 단원의 이항분포에서 중요하게 이용되므로 그 의미를 정확히 이해시키도록 한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 중복순열과 중복조합

순열과 조합은 어떤 사건을 분석할 때 가장 기본적으로 사용되는 개념이다. 즉, 순열은 주어진 대상을 배열하는 과정 또는 그 결과를 뜻하고, 조합은 주어진 대상에서 일부를 선택하는 과정 또는 그 결과를 뜻한다.

이러한 순열과 조합에서 주어진 대상을 중복사용하여 배열하거나 선택하는 것이 중복순열, 중복조합이다.

따라서 중복순열과 중복조합을 지도할 때에는 순열과 조합에 대한 기본 개념을 확인하여야 한다.

원순열(circular permutation)을 지도할 때에는 원의 회전성을 염두에 두어야 한다. 즉, 원에서는 시작과 끝을 구별하지 않음을 알아야 한다.

2. 계승($n!$)과 스터링(Stirling)의 공식

기호 $n!$은 n의 계승 또는 n 팩토리얼(factorial)이라 읽고, 이는 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 나타낸다.

이 기호는 그람프(Kramp, C.; 1760～1826)에 의하여 1808년에 도입되었다. 그는 이전에 사용된 기호에 의하여 초래되는 인쇄상의 어려움을 피하기 위하여 이 기호를 선택하였다.

n이 큰 수일 때, $n!$은

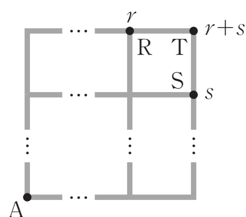
$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \quad (e=2.71828\cdots)$$

과 거의 같다는 스터링의 공식이 알려져 있다.

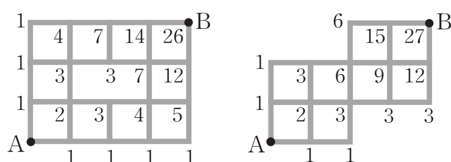
즉, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=\sqrt{2\pi}$이다.

3. 최단 경로의 수 구하기

오른쪽 그림과 같이 A지점에서 R지점과 S지점까지 이르는 최단 경로의 수가 각각 r, s일 때, A지점에서 T지점까지 이르는 최단 경로의 수는 $r+s$이다.



이것을 이용하면 복잡한 도로망의 경우에도 다음 그림과 같이 각 지점까지의 최단 경로의 수를 써서 구할 수 있다.



5. 다항정리

항이 a, b, c 세 개인 $(a+b+c)^n$의 전개식을 3항정리라고 한다. 일반적으로 3항정리 이상을 다항정리라고 한다.

$(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n$의 일반항은

$${}_nC_s a^{n-s}(b+c)^s$$

여기서 $(b+c)^s$의 일반항은 ${}_sC_r b^{s-r}c^r$이므로

$(a+b+c)^n$의 일반항은

$${}_nC_s a^{n-s}\cdot {}_sC_r b^{s-r}c^r$$

$$=\frac{n!}{s!(n-s)!}\cdot\frac{s!}{r!(s-r)!}a^{n-s}b^{s-r}c^r$$

$n-s=p, s-r=q$라 하면

$$p+q+r=(n-s)+(s-r)+r=n$$

따라서 $(a+b+c)^n$의 일반항은 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r \text{ (단, } p+q+r=n)$$

4. 파스칼의 삼각형과 시어핀스키의 삼각형

파스칼의 삼각형의 n행에 있는 n개의 이항계수의 합은 2^{n-1}이다.

행	파스칼의 삼각형	합
1	1	$1=2^0$
2	1 1	$2=2^1$
3	1 2 1	$4=2^2$
4	1 3 3 1	$8=2^3$
5	1 4 6 4 1	$16=2^4$
6	1 5 10 10 5 1	$32=2^5$
⋮	⋮	⋮

파스칼의 삼각형에서 이항계수 중 짝수는 0, 홀수는 1로 바꾸어 놓으면 시어핀스키(Sierpinski)의 삼각형 모양으로 된다.

6. 미제스(Mises, L.; 1883~1953)의 이론

확률을 응용하는 데 있어서는 수학적 확률과 통계적 확률이 일치할 때 비로소 그 의미가 있다. 미제스는 시행을 무한히 반복한다고 하는 이상적 실험을 생각하고, 이것에 집단이라는 개념을 도입해서 확률론을 조직했다.

이를테면, 동전을 던져서 앞면이 나오면 0, 뒷면이 나오면 1을 대응시키고, 같은 동전을 반복하여 계속 던지면 0과 1로 이루어진 무한수열

$$e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$$

을 얻는다.

여기서 처음의 n항 중 0인 항의 개수를 n_0, 1인 항의 개수를 n_1이라고 할 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_0}{n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n_1}{n}=\frac{1}{2}$$

이며, 이 수열에서 적당한 부분수열을 택해도 같은 성질을 갖는다고 생각한다.

미제스는 이와 같은 무규칙성을 갖는 수열을 생각하고, 집단(단순집단과 일반집단)이라는 개념을 바탕으로 하여 확률론의 공리에 의한 구성에 성공했다.

미제스의 이론에서는 집단에 대하여 확률이 정의되고, 집단에서 새로운 집단을 유도하고, 본시의 집단에 있어서의 확률에서 새 집단에서의 확률을 구한다.

그 방법은 선출, 혼성, 분할, 결합이 있는데 선출에 의해서는 확률은 변하지 않음을, 혼성에 의해서는 확률의 덧셈정리를, 분할에 의해서는 베이스의 정리를, 결합에 의해서는 곱셈정리를 얻는다.

미제스의 이론에서는 집단의 조건을 만족시키는 것에 대하여 확률을 생각하므로, 반복할 수 없는 것은 확률의 대상이 될 수 없다.

7. 무이유의 이유(reason of no reason)

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 고 하는 것을 가정했는데, 이것은 직관적으로 생각하면 쉬우나 따지고 보면 문제가 달라진다. 이 수학적 정의를 최초로 한 사람은 라플라스(Laplace, P.S.; 1749~1827)이다.

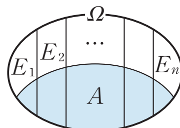
당시 라플라스의 확률론을 반대하는 학자들이 이것을 따지고 들었다. 그래서 라플라스 쪽에서 이에 대한 대답을 못하게 되자, 거꾸로 같은 정도로 기대할 수 없는 이유를 말해 보라고 하였다. 그러자 반대하는 사람들도 그 이유를 말하지 못하고 우물쭈물하고 있을 때, 라플라스 쪽에서 '이유를 말하지 못하는 것이 바로 같은 정도로 기대할 수 있는 이유다.' 라고 했다.

이것을 '무이유의 이유' 라고 한다.

8. 원인의 확률-베이스(Bayes)의 정리

일반적으로 확률론에서는 연역형의 확률, 즉 원인을 알고 사건이 일어날 확률을 생각한다. 그러나 여기서는 이미 일어난 사건에 대하여 결과를 알고 원인의 확률을 구하는 문제, 즉 귀납형의 확률을 생각한다.

전사건 Ω를 서로 배반인 n개의 사건 $E_1, E_2, \cdots, E_n$으로 분할한다. 즉,



$$E_i \cap E_j = \phi$$
$$(i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n)$$
$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$$

이때, 사건 A에 대하여 $A \cap E_1, A \cap E_2, \cdots, A \cap E_n$은 서로 배반이고, 그 합집합은 A가 된다.

여기서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n) \\ &= P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + \cdots \\ &\quad + P(E_n)P(A|E_n) \end{aligned}$$

그런데

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)}{P(A)} P(E_i) \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

이므로 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(E_1)P(A|E_1) + \cdots + P(E_n)P(A|E_n)}$$

이것을 베이스의 정리라고 한다.

위의 베이스의 정리에서 사건 $E_1, E_2, \cdots, E_n$을 n가지의 '원인' 이라고 한다면 $P(E_i)$는 원인의 가능성으로서 사전확률(prior probability)이라 할 수 있고, $P(A|E_i)$는 원인 E_i의 결과로서 A가 관측될 확률이다. 또한 $P(E_i|A)$는 A가 관측된 후에 원인 E_i의 가능성으로서 사후확률(posterior probability)이라고 할 수 있다. 따라서 베이스의 정리가 뜻하는 것은 관측 결과(정보)를 바탕으로 하여 원인의 확률을 계산하는 것이다.

9. 확률의 공리적 구성

확률의 수학적 정의에서 '같은 정도로 기대된다.' 라는 가정은 따지고 보면 문제가 있다.

이런 문제를 피하기 위하여 콜모고로프(Kolmogorov, A.N.; 1903~1987)는 '확률론의 기초 개념' 의 제1장에서 다음과 같은 확률공간의 공리를 두고 있다.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad P(A) \geq 0$
(2) 전체 표본공간 E에 대하여 $\quad P(E) = 1$
(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 서로 배반사건일 때
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Ⅴ. 통계

01 단원의 목차

1. 확률분포

1. 확률변수와 확률분포
   - 01 확률변수의 뜻
   - 02 이산확률변수와 확률질량함수
   - 03 연속확률변수와 확률밀도함수

2 평균과 표준편차
   - 01 이산확률변수의 평균과 표준편차
   - 02 연속확률변수의 평균과 표준편차
   - 03 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

3 이항분포
   - 01 이항분포의 뜻
   - 02 이항분포의 평균과 표준편차
   - 03 이항분포의 분포표와 그래프
   - 04 큰 수의 법칙

4 정규분포
   - 01 정규분포의 뜻과 정규분포곡선의 성질
   - 02 표준정규분포
   - 03 표준화
   - 04 이항분포와 정규분포의 관계

2. 통계적 추정

1 표본조사와 표본평균의 분포
   - 01 표본조사
   - 02 표본평균의 뜻
   - 03 표본평균의 분포

2 모평균의 추정
   - 01 모평균의 추정

02 단원의 지도 목표

1. 확률분포

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다.

② 이산확률변수의 뜻을 알게 하고, 확률질량함수의 성질을 이해하게 한다.

③ 연속확률변수의 뜻을 알게 하고, 확률밀도함수의 성질을 이해하게 한다.

④ 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.

⑤ 이항분포의 뜻을 알게 하고, 그 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

⑥ 이항분포의 분포표와 그래프를 이해하게 한다.

⑦ 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

⑧ 표준정규분포의 뜻을 알게 하고, 표준정규분포표를 활용할 수 있게 한다.

⑨ 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하게 한다.

2. 통계적 추정

① 모집단과 표본의 뜻을 알게 한다.

② 전수조사와 표본조사의 뜻을 알게 한다.

③ 임의추출의 뜻을 알게 하고, 그 방법을 이해하게 한다.

④ 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 알게 한다.

⑤ 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.

⑥ 추정의 뜻을 알게 하고, 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해하게 한다.

⑦ 모평균을 추정하게 하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

03 단원 지도상의 유의점

① 확률변수와 확률분포의 뜻은 구체적인 보기를 통하여 이해하도록 지도한다.

② 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 때, 구체적인 보기에서 출발하여 일반화하도록 한다.

③ 큰 수의 법칙은 논리적인 유도를 피하고 구체적인 보기를 통하여 이해시키도록 한다.

④ 연속확률분포로서의 정규분포를 이해시키고, 표준정규분포를 활용하도록 지도한다.

⑤ 이항분포와 정규분포 사이의 관계는 그래프를 통하여 이해시키도록 한다.

⑥ 표본평균의 뜻과 그 분포를 구체적인 보기를 통하여 이해시키도록 하고, 표본평균과 모평균의 관계를 알게 한다.

⑦ 모평균의 추정은 모집단이 정규분포인 경우만 다루도록 한다.

04 단원의 이론적 배경

1. 학문으로서의 통계학

통계학(statistics)의 어원은 라틴어의 status(상태)에서 유래한다. 이 status가 중세 이후 정치적인 의미로서 state(국가)를 가리키게 되었다. 따라서 '통계학(statistics)' 은 원래의 의미가 '국가의 상태를 조사, 연구하는 것' 임을 알 수 있다. 학문으로서의 통계학의 성립은 17~18세기 계몽주의 시대에 다음과 같이 2개의 큰 줄기로서 이루어졌다.

(1) 국세학(國勢學, Staaten Kunde)

국세학은 주로 독일에서 발전하였는데 이의 어원은 콘링(Conring, H.; 1606~1681)이 1660년 헤르스타트 대학에서 'Staatskunde' 라는 과목을 강의한 것에서 유래한다. 그는 이 강좌에서 '장차 정치가가 되려는 사람은 헌법 및 행정의 지식과 더불어 국가가 어떤 국토, 어떤 국민으로 구성되어 있는가를 올바르게 아는 것이 중요하다.' 고 강조하였다. 콘링의 후계자로는 아헨바알(Achenw-all, G.; 1719~1772), 앤처센(Anchersen, J.P.; 1700~1765) 등이 있다.

(2) 정치산술학(政治算術學, Political Arithmetic)

정치산술학은 주로 영국에서 발전하였는데 이의 어원은 그랜트(Graunt, J.; 1620~1674)가 1662년에 발표한 논문 '런던 시민의 생사에 대한 자연적 그리고 정치적 관찰(Natural and Political Observations on the London Bills of Mortalitly)' 에서 유래한다. 그는 이 논문에서 질병 또는 전쟁으로 인한 남녀의 성비(性比)가 어떻게 변화하는가를 발표하고, 인구의 발전에 법칙이 있음을 찾았다.

2. 근대통계학과 현대통계학의 발달 과정

17~18세기 프랑스에서 발달한 확률론과 영국에서 발달한 정치산술학의 결합으로 근대통계학은 태동하였다. 즉, 벨기에의 케틀레(Quételet, L.A.J.; 1796~1874)는 정치산술학파가 사용하는 자료에 확률론적으로 논리를 적용하여 근대통계학의 형태를 완성시켰다.

케틀레 이후에 근대통계학의 발전에 공헌한 사람은 유전현상을 수학적으로 해설하는 데 성공한 갈톤(Galton, F.; 1822~1911)이 있다.

피어슨(Pearson, K.; 1857~1936)은 생물측정학, 우생학, 유전학을 통하여 통계적 연구 방법의 확립에 일생을 바쳤는데 1901년 세계 최초의 통계학 잡지인 Biometrika를 갈톤 등과 함께 창간하였다.

현대통계학은 피어슨의 제자인 고셋(Gosset, W.S.; 1876~1936)에 의하여 시작되었다. 그의 1908년에 'Student' 라는 이름으로 Biometrika에 발표한 논문 'The Probable Error of a Mean' 은 현대통계학의 기초가 되었다. 고셋의 결과를 계승한 피셔(Fisher, R.A.; 1890~1962)는 새로운 분포법칙을 유도하고 여러 가지 검정법을 고안하여 현대통계학을 완성하였다.

〈참고 자료〉

1. 박한식 · 이강섭(1985). 수리통계학, 교학연구사
2. 이강섭 외 6인(2003). 고등학교 수학 I 교사용지도서, (주)지학사
3. 정한영(1995). 통계학사 개론, 한림대학교 출판부
4. 허명회(1991). 통계학사 콜로키움, 자유아카데미
5. Eves, H., 이우영 · 신항균 역(1999). 수학사, 경문사
6. Bressoud, D.W., 허민 · 오혜영 역(1997), 실해석학, 경문사
7. Boyer, C.·Merzbach, Uta C., 양영오 · 조윤동(2000), 수학의 역사, 경문사
8. Sherman, K.S.(1968), Calculus, McGraw－Hill Book Co

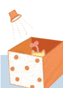
I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한　2 함수의 연속



자연 현상 중에는 시간의 흐름에 따라 그 변화되는 과정을 예측할 수 있는 것도 있고, 예측할 수 없는 것도 있다. 또 어떤 단계에 이르면 상태가 급변하여 예측이 불가능한 현상도 있으며, 어떤 안정한 상태로 접근하여 예측이 가능한 현상도 있다. 이러한 여러 가지 현상들을 수학적 도구를 이용하여 설명할 수 있다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

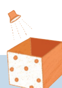
▶ **고등학교 수학**
- 함수

▶ **수학 Ⅰ**
- 지수함수와 로그함수
- 수열
- 수열의 극한



이번에 배울 내용

- 함수의 극한
- 함수의 연속



다음에 배울 내용

▶ **미적분과 통계 기본**
- 다항함수의 미분법
- 다항함수의 적분법

이 단원의 학습 목표

1. 함수의 극한의 뜻을 안다.
2. 함수의 극한에 대한 성질을 이해한다.
3. 함수의 연속의 뜻을 안다.
4. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

10



단원을 시작하기 전에 …

분모의 유리화

1 다음 무리식의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$

함수의 정의역과 치역

2 다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x}$　　(2) $y=x^2+1$

함수의 그래프

3 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=2x+1$　　(2) $y=|x-1|$

(3) $y=\sqrt{|x|}$　　(4) $y=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$

수열의 극한

4 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+1}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

수열의 극한값과 성질

5 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2b_n+1}{3a_n+1}$

단원을 시작하기 전에 ·························· 풀이

1 (1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}$

$=-\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{x+1}}}{\mathbf{x}}$

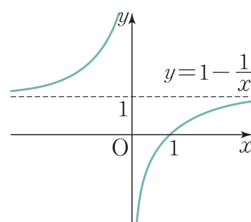
(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{(x+1)-(x+3)}$

$=\mathbf{\dfrac{1}{2}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})}$

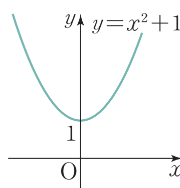
2 (1) $y=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$



정의역: $\{x\,|\,x\neq 0$인 모든 실수$\}$

치역: $\{y\,|\,y\neq 1$인 모든 실수$\}$

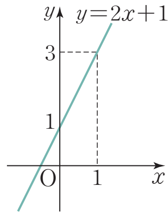
(2) $y=x^2+1$



정의역: $\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

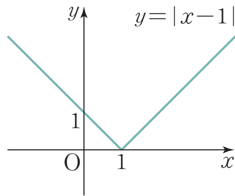
치역: $\{y\,|\,y\geq 1\}$

3 (1) 함수 $y=2x+1$의 그래프 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



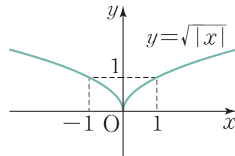
(2) $y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$

이므로 $x\geq 1$인 경우와 $x<1$인 경우로 나누어 그 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



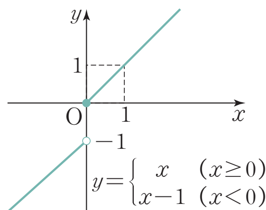
(3) $y=\sqrt{|x|}=\begin{cases} \sqrt{x} & (x\geq 0) \\ \sqrt{-x} & (x<0) \end{cases}$

이므로 $x\geq 0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 그 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



(4) $y=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$

이므로 $x\geq 0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 그 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



4 (1) 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{1+0}{1+0}=\mathbf{1}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$=0+0=\mathbf{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\infty(1-0)=\boldsymbol{\infty}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\mathbf{0}$

5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

$\displaystyle=(\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n)(\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n)$

$=(3+2)^2$

$=5^2=\mathbf{25}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n+1}{3a_n+1}$

$\displaystyle=\frac{\lim_{n\to\infty}(2b_n+1)}{\lim_{n\to\infty}(3a_n+1)}$

$\displaystyle=\frac{2\lim_{n\to\infty}b_n+1}{3\lim_{n\to\infty}a_n+1}$

$\displaystyle=\frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 3+1}$

$\displaystyle=\frac{5}{10}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

1 함수의 극한

이 단원을 배우면

- 함수의 극한의 뜻을 알 수 있다.
- 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

1 함수의 극한

1 함수의 수렴과 발산

학습 목표
- 함수의 극한의 뜻을 안다.
- 함수의 수렴과 발산을 이해한다.
- 좌극한과 우극한을 이해한다.

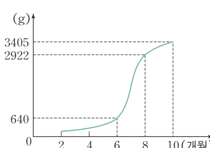


다 가 서 기 / **생장 곡선**

생장 곡선은 생물의 생장에 영향을 주는 요인을 분석하거나 여러 가지 생물 사이의 생장을 비교할 때 사용한다.

생물의 생장을 시간에 따라 측정하여 그래프로 나타낸 곡선을 생장 곡선이라고 한다. 생장 곡선의 전형적인 모양은 S자 모양의 시그모이드 곡선(Sigmoid Curve)이다. 이 곡선은 처음에는 완만하게 증가하다가 중간에 급속하게 생장하는 부분을 거쳐 마지막에는 서서히 생장한 후 정지하게 되는 세 단계로 이루어진다.

오른쪽 그림과 같이 태아의 생장 곡선도 시그모이드 곡선이며, 일반적으로 태아가 6개월에 가까워지면 태아의 무게는 640 g에 가까워지고, 10개월에 가까워지면 3405 g에 가까워진다.

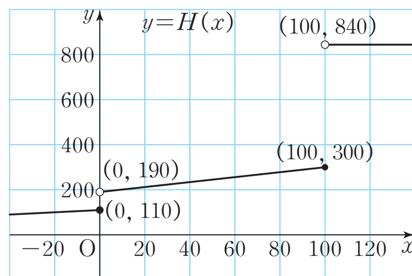




◀태아 ▼신생아

다가서기 / 해설

화학에는 열함량을 나타내는 엔탈피(enthalpy)라는 함수가 있는데, 온도 x ℃에서 물의 엔탈피 $H(x)$ cal/g을 다음과 같은 그래프로 나타낼 수 있다.



이 그래프에서 x의 값이 왼쪽에서 오른쪽으로 100에 가까워지면 y의 값은 300에 가까워지지만 x의 값이 오른쪽에서 왼쪽으로 100에 가까워지면 y의 값은 840에 가까워짐을 알 수 있다. 이와 같이 자연 현상 중에는 어떤 단계에 도달하면 상태가 급격히 변하거나, 한없이 커지거나 작아지는 경우가 종종 있다.

이런 상황은 함수의 극한과 밀접한 관계가 있다.

소단원의 학습 목표

1. 함수의 극한의 뜻을 안다.
2. 함수의 수렴과 발산을 이해한다.
3. 좌극한과 우극한을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, 좌극한, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, 우극한, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

보충 학습

1. 수열의 수렴과 극한값

무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

여기서 $n\to\infty$에 있는 기호 ∞를 무한대라고 읽는다. ∞는 수가 아니고 한없이 커짐을 나타내는 기호이다.

2. 수열의 발산

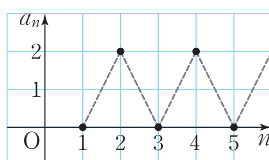
수렴하지 않는 수열은 발산한다고 한다. 이때, 발산하는 경우는 다음 세 가지가 있다.

(i) n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값도 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$와 같이 나타낸다.

(ii) n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$와 같이 나타낸다.

(iii) 다음 수열 $\{a_n\}$을 생각해 보자.

$\{a_n\}: 0, 2, 0, 2, \cdots, 1+(-1)^n, \cdots$



이 수열은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.

이와 같은 수열은 진동한다고 하며, 진동하는 수열은 발산하는 수열이다.

13

01 함수의 수렴과 발산

탐 구 하 기 / 계산기를 이용한 함숫값의 계산

함수 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 계산기를 이용하여 다음 표의 빈칸에 알맞은 함숫값을 써넣어라.
(단, 소수 다섯째 자리에서 반올림하여라.)

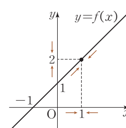
x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$							

2. x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 가까워지는지 알아보아라.

알 아 보 기 / 함수의 수렴에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떻게 변하는지 알아보자.

예를 들어 함수 $f(x)=x+1$에 대하여 오른쪽 그래프에서 x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



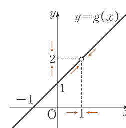
특별한 조건이 없을 때, 분수함수의 정의역은 분모를 0으로 하지 않는 실수 전체의 집합으로 한다.

한편 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$일 때 분모가 0이 되므로, $x=1$에서 정의되지 않는다.

그러나 $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그림에서 x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



탐구하기 / 풀이

1.

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	**1.9950**	**1.9995**	**1.9999**		**2.0000**	**2.0005**	**2.0050**

2. 물음 1의 표에서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 **2**에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

• 함수 $f(x)=x+1$에서 x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 다음 표를 통해서도 알 수 있다.

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1

• 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지를 확인하여 구할 수 있다.

이를테면 함수 $f(x)=-x^2+3$의 그래프에서 x가 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

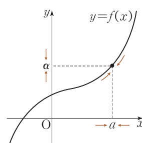


코시(Cauchy, A. L. : 1789~1857)
프랑스의 수학자로 극한에 대한 이론을 전개하였다.

이와 같이 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

와 같이 나타낸다.



이때, α를 $x \to a$일 때, $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 한다.

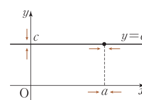
예를 들어 함수 $f(x)=x+1$과 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$x \to 1$은 x의 값이 1에 한없이 가까워짐을 뜻하므로 $x\neq 1$이다.

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c$$



함 께 하 기 /

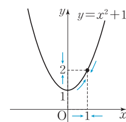
익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 극한값 $\lim_{x\to 1}(x^2+1)$을 구하여라.

풀이

오른쪽 그림에서 x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, 즉 $x \to 1$일 때 x^2+1의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=\mathbf{2}$$



스 스 로 하 기 /

익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

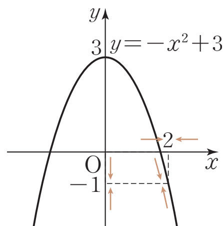
1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}(2x+1)$ (2) $\lim_{x\to 0}(x^2-1)$

(3) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)$ (4) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}$

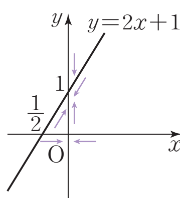
따라서 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to 2}(-x^2+3)=-1$$



스스로 하기 / 풀이

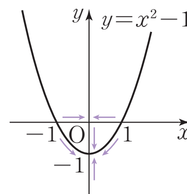
1 (1) $f(x)=2x+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 0}(2x+1)=\mathbf{1}$$

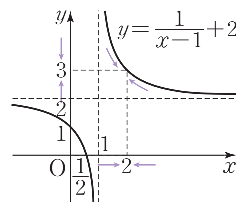
(2) $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 0}(x^2-1)=\mathbf{-1}$$

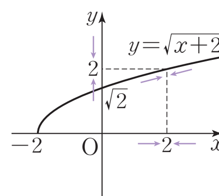
(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-1}+2\right)=\mathbf{3}$$

(4) $f(x)=\sqrt{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}=\mathbf{2}$$

알 아 보 기 / 함수의 발산에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그림에서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다.

이와 같이 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty$$

와 같이 나타낸다.

∞는 수가 아니라 무한히 커지는 상태를 나타낸다.

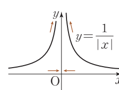
한편 함수 $f(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그림에서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

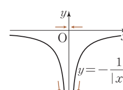
이와 같이 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$$

와 같이 나타낸다.

| 보기 | (1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}=\infty$　　(2) $\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$





스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

2 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)$　　(2) $\lim_{x \to 1} \frac{2}{|x-1|}$

알아보기 / 해설

두 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x^2}$에서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$와 $g(x)$의 값을 조사하면 다음 표와 같다.

x	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	0
$f(x)$	1	100	10000	
$g(x)$	-1	-100	-10000	
x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0
$f(x)$	1	100	10000	
$g(x)$	-1	-100	-10000	

여기서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지고, $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

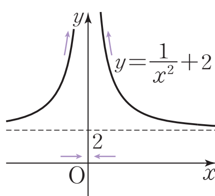
이것을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to 0} f(x)=\infty$(양의 무한대로 발산)

$\lim_{x \to 0} g(x)=-\infty$(음의 무한대로 발산)

스스로 하기 / 풀이

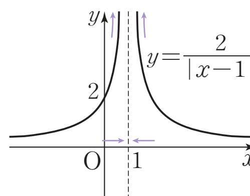
2 (1) $f(x)=\frac{1}{x^2}+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)=\infty$$

(2) $f(x)=\frac{2}{|x-1|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{|x-1|}=\infty$$

16

알아보기 / $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수의 극한에 대하여 알아보자.

x의 값이 한없이 커지는 것을 $x \to \infty$로, x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 $x \to -\infty$로 나타낸다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

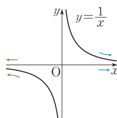
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$$

또 x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$$

| 보기 | $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$



한편 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 양 또는 음의 무한대로 발산하면 기호로 다음과 같이 나타낸다.

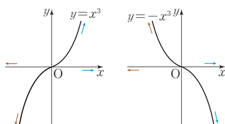
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

| 보기 | $\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} (-x^3)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (-x^3)=\infty$



스스로 하기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

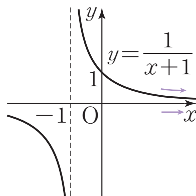
3 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$ (2) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x+1}+1\right)$

(3) $\lim_{x\to\infty} (x^2+3)$ (4) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)$

스스로 하기 / 풀이

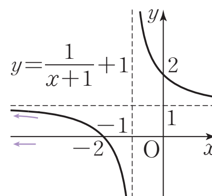
3 (1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}=\mathbf{0}$$

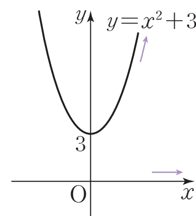
(2) $f(x)=\frac{1}{x+1}+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x+1}+1\right)=\mathbf{1}$$

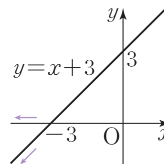
(3) $f(x)=x^2+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대로 발산하므로

$$\lim_{x\to\infty} (x^2+3)=\boldsymbol{\infty}$$

(4) $f(x)=x+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 음의 무한대로 발산하므로

$$\lim_{x\to-\infty} (x+3)=\boldsymbol{-\infty}$$

알아보기 / 해설

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x>1) \\ 1 & (x\le 1) \end{cases}$$

에 대하여 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값을 살펴보자.

오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 x가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

또 x가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

이때,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

와 같이 나타낸다.

이와 같이 좌극한과 우극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다. 즉,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)\ne \lim_{x\to 1+0} f(x)$$

이면 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

02 좌극한과 우극한

알 아 보 기 / 좌극한과 우극한에 대하여 알아보자.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, x가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다. 또 x가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 $f(x)$의 **좌극한**이라고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$$

또 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 $f(x)$의 **우극한**이라고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\beta$$

'$x\to a-0$'은 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 것을 나타내고 '$x\to a+0$'은 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 것을 나타낸다. 특히 $a=0$일 때에는 $x\to -0$, $x\to +0$으로 나타낸다.

예를 들어 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$에 대하여

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x=1$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} (x+1)=2$$

함수의 극한의 정의로부터 함수 $f(x)$에 대하여 우극한 $\lim_{x\to a+0} f(x)$와 좌극한 $\lim_{x\to a-0} f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재함을 알 수 있다. 즉, 함수의 극한, 좌극한, 우극한 사이에 다음이 성립한다.



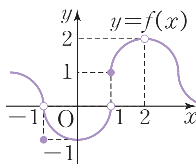
함수의 극한, 좌극한, 우극한 사이의 관계

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$$



Plus 문제

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 보기 중 극한값이 존재하는 것을 모두 골라라.



| 보 기 |

ㄱ. $\lim_{x\to -1-0} f(x)$ ㄴ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)$

ㄷ. $\lim_{x\to 1} f(x)$ ㄹ. $\lim_{x\to 2} f(x)$

| 풀이 |

ㄱ. $x=-1$에서의 $f(x)$의 좌극한은 0이므로

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=0$$

ㄴ. $x=1$에서의 $f(x)$의 좌극한은 0이므로

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=0$$

ㄷ. $x=1$에서의 $f(x)$의 좌극한은 0이고 우극한은 1이므로

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

이때, $\lim_{x\to 1-0} f(x)\ne \lim_{x\to 1+0} f(x)$이므로 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄹ. $x=2$에서의 $f(x)$의 좌극한과 우극한은 2이므로

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=2,\quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=2$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

18

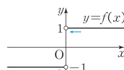
함 께 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 함수 $f(x)=\frac{x}{|x|}$에 대하여 $x=0$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하여라.

풀이

우극한: $\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=1$

좌극한: $\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=-1$



$x>0$이면 $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1$

$x<0$이면 $\frac{x}{|x|}=-\frac{x}{x}=-1$

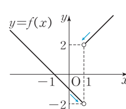
2 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$이 존재하는지 말하여라.

풀이

함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$, $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$은 **존재하지 않는다.**



$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|}$이므로

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 13쪽 | 익힘책 14쪽 | 익힘책 15쪽

1 다음 극한을 조사하여라.

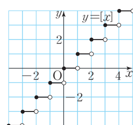
(1) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}$ (2) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-x}{|x-1|}$ (4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-x}{|x-1|}$

2 실수 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낼 때, 함수 $f(x)=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to2-0}[x]$ (2) $\lim_{x\to2+0}[x]$

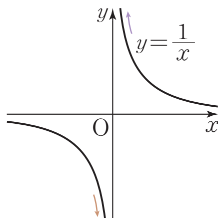
(3) $\lim_{x\to2}[x]$



스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$

(2) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$



(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-x}{|x-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+0}x$

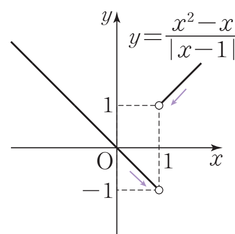
$=\mathbf{1}$

(4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-x}{|x-1|}$

$=\lim_{x\to1-0}\frac{x(x-1)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-0}(-x)$

$=\mathbf{-1}$



2 (1) $\lim_{x\to2-0}[x]=\mathbf{1}$

(2) $\lim_{x\to2+0}[x]=\mathbf{2}$

(3) $\lim_{x\to2-0}[x]\neq\lim_{x\to2+0}[x]$이므로

$\lim_{x\to2}[x]$의 값은 **존재하지 않는다.**

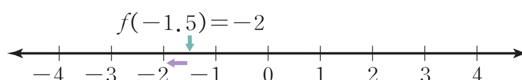
보충 학습

1. 가우스 함수의 정의

실수 x에 대하여 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$로 나타내고, 함수 $f(x)=[x]$를 최대 정수 함수(greatest integer function) 또는 가우스 함수라고 한다.

예를 들어 $f(2.1)=2$, $f(3)=3$, $f(\sqrt{2})=1$, $f(-0.5)=-1$이다.

가우스 함수의 함숫값은 수직선을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다. x의 값을 수직선 위에 나타내어 그 값과 같거나 작은 쪽(음수 방향)에 있는 정수 중 가장 큰 정수를 함숫값으로 구하면 된다.



2. 가우스 함수의 그래프

가우스 함수 $y=[x]$의 그래프를 그려 보자.

정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로 x의 값을 구간으로 나누어 가우스 기호 [ ]를 소거한 후 그래프를 그린다.

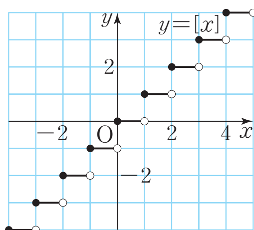
$-2\le x<-1$일 때, $y=[x]=-2$

$-1\le x<0$일 때, $y=[x]=-1$

$0\le x<1$일 때, $y=[x]=0$

$1\le x<2$일 때, $y=[x]=1$

따라서 함수 $y=[x]$의 그래프는 다음 그림과 같이 계단 모양이 된다.



일반적으로 함수 $y=[ax+b]$의 그래프는 x의 값의 구간을 $n\le ax+b<n+1$에서

$$\frac{n-b}{a}\le x<\frac{n+1-b}{a}\ (n\text{은 정수})$$

로 나누어 그래프를 그린다.

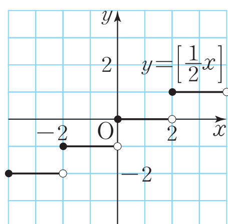
이를테면 함수 $y=\left[\frac{1}{2}x\right]$의 그래프는

$-2\le x<0$일 때, $y=\left[\frac{1}{2}x\right]=-1$

$0\le x<2$일 때, $y=\left[\frac{1}{2}x\right]=0$

$2\le x<4$일 때, $y=\left[\frac{1}{2}x\right]=1$

이므로 다음 그림과 같다.



19

공학 도구

* 수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

함수의 극한값 확인하기

그래프를 그릴 수 있는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수의 극한값을 확인하여 보자.

1. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$ 임을 확인하여 보자.

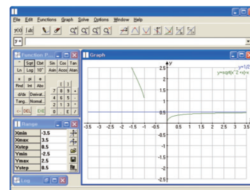
1단계 컴퓨터 프로그램을 실행시킨다.

2단계 수식 입력줄에 'sqrt(x^2+x)−x'를 입력하고 그리기 아이콘 을 클릭한다.

3단계 수식 입력줄에 '1/2'을 입력하고 그리기 아이콘 을 클릭한다.

4단계 축소 아이콘 을 이용하여 그래프를 축소하여 본다.

오른쪽 그림에서 x의 값이 커짐에 따라 y의 값이 한없이 $\frac{1}{2}$에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.



2. $\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$임을 확인하여 보자.

1단계 컴퓨터 프로그램을 실행시킨다.

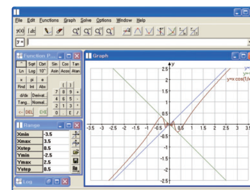
2단계 수식 입력줄에 'x'를 입력하고 그리기 아이콘 을 클릭한다.

3단계 수식 입력줄에 '−x'를 입력하고 그리기 아이콘 을 클릭한다.

4단계 수식 입력줄에 'xcos(1/x)'을 입력하고 그리기 아이콘 을 클릭한다.

5단계 확대 아이콘 을 이용하여 그래프를 확대하여 본다.

오른쪽 그림에서 x의 값이 0에 한없이 가까워짐에 따라 y의 값이 0에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.



공학 도구 / 해설

컴퓨터 프로그램 Equation Grapher에서 함수의 그래프를 그려 그 극한값을 살펴보는 활동이다.

Equation Grapher는 그래프를 그릴 수 있는 프로그램으로 그래프에 대한 x절편, y절편, 최댓값, 최솟값, 극한값 등을 찾는 데 편리하다.

Equation Grapher 이외에도 그래프 관련 컴퓨터 프로그램으로

GPS(The Geometer's Sketchpad)
Mathematica
Maple
MoNooN Grapher

등이 있다.

20

1 함수의 극한

2 극한값의 계산

학습 목표
- 함수의 극한에 대한 성질을 이해한다.
- 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
- 함수의 극한의 대소 관계를 이해한다.



다 가 서 기 / **빠른 계산법**



시간에 따라 변하는 두 생물의 개체 수를 계산할 때, 시각 t에서의 두 개체 수의 합을 나타내는 식을 구한 후 그 식에 t의 값을 대입하여 계산할 수도 있으나, 각각의 개체 수를 나타내는 식을 구한 후 각 식에 t의 값을 대입하여 나온 값을 합할 수도 있다.

극한값을 구할 때에도 이런 방법을 적용하여 쉽게 극한값을 구할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 함수의 극한에 대한 성질을 이해한다.
2. 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
3. 함수의 극한의 대소 관계를 이해한다.

참고 | '무한'의 등장

그리스의 피타고라스학파는 수를 만물의 근본으로 파악했다. 이들은 자연계의 물질을 삼각형이나 사각형 같은 기하학적 도형으로 표현했을 뿐만 아니라 각 수에 윤리적 의미를 부여했다.

무한이라는 용어는 그리스어로 아페이론(apeiron)이라고 하는데 이것은 끝, 한계(限界), 또는 한정(限定)이라는 뜻의 그리스어 페라스(peras)에 부정의 의미를 갖는 접두사 '아(a)'를 합성하여 만든 단어이다.

무한의 개념을 처음으로 다룬 수학자 아르키메데스(Archimedes ; B.C. 287～B.C. 212)는 "모래알의 개수를 셈하는 방법"에서 "모래알의 개수가 무한은 아니라 해도 이렇게 거대한 수를 나타내는 수사는 없다."고 언급하였다. 그는 또 유한이면 아무리 큰 수라도 그 단위를 명명할 수 있고 셈을 할 수 있지만, 무한이면 단위를 명명할 수 없고 따라서 셈을 할 수도 없다고 하였다.

오랫동안 무한은 신의 영역으로만 여겨졌고, 이 때문에 무한의 본질에 도전하는 것은 신의 노여움을 사게 될지도 모르는 엄청난 지적 모험으로 생각되었다. 그래서 수학자들도 오래도록 무한의 개념을 외면해왔다. 하지만 근대에 들어서면서 무한대, 무한소, 무한급수 등 무한의 개념을 도입하지 않고는 해결할 수 없는 수학적 단계에 이르게 되었다.

마침내 19세기 말에 독일의 수학자 칸토어(Cantor, G. ; 1845～1918)는 29세 때인 1874년 무한집합에 관한 혁명적인 논문을 발표했다.

그의 집합론은 이후 20세기의 모든 수학의 기초를 새로 다지게 하는 엄청난 영향을 끼친 것으로 평가되고 있다.

탐구하기 / 풀이

1. $\lim_{x \to 1}(x+1)=2,\ \lim_{x \to 1}(x-1)=0$

이므로

$\lim_{x \to 1}(x+1)+\lim_{x \to 1}(x-1)$

$=2+0=\mathbf{2}$

$\lim_{x \to 1}\{(x+1)+(x-1)\}$

$=\lim_{x \to 1}2x=\mathbf{2}$

$\therefore\ \boldsymbol{\lim_{x \to 1}(x+1)+\lim_{x \to 1}(x-1)}$

$\boldsymbol{=\lim_{x \to 1}\{(x+1)+(x-1)\}}$

2. $\lim_{x \to 2}(x+1)=3,\ \lim_{x \to 2}(x-1)=1$

이므로

$\lim_{x \to 2}(x+1)\cdot\lim_{x \to 2}(x-1)$

$=3\times1=\mathbf{3}$

$\lim_{x \to 2}(x+1)(x-1)$

$=\lim_{x \to 2}(x^2-1)=\mathbf{3}$

$\therefore\ \boldsymbol{\lim_{x \to 2}(x+1)\cdot\lim_{x \to 2}(x-1)}$

$\boldsymbol{=\lim_{x \to 2}(x+1)(x-1)}$

01 함수의 극한에 대한 성질

탐 구 하 기 / 함수의 극한에 대한 성질

다음 극한값을 구하고, 그 값을 비교하여 보자.

1. $\lim_{x\to1}(x+1)+\lim_{x\to1}(x-1),\ \lim_{x\to1}\{(x+1)+(x-1)\}$
2. $\lim_{x\to2}(x+1)\cdot\lim_{x\to2}(x-1),\ \lim_{x\to2}(x+1)(x-1)$

알 아 보 기 / 함수의 극한에 대한 성질을 알아보자.

수열의 극한과 마찬가지로 함수의 극한에서도 다음이 성립한다.

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq0$, $\beta\neq0$)

함수의 극한에 대한 성질은 $x\to a-0$, $x\to a+0$ $x\to\infty$, $x\to-\infty$ 일 때에도 성립한다.

$\lim_{x\to a}c=c$ (단, c는 상수)

| 보기 | $\lim_{x\to2}(3x+5)=\lim_{x\to2}3x+\lim_{x\to2}5=3\lim_{x\to2}x+5=3\cdot2+5=11$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 19쪽

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}(x^2-3x+4)$ (2) $\lim_{x\to2}(x-1)(x^2+1)$

(3) $\lim_{x\to-1}\frac{3x}{2x-1}$ (4) $\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{x^2+1}$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\lim_{x\to1}(x^2-3x+4)$

$=\lim_{x\to1}x^2-\lim_{x\to1}3x+\lim_{x\to1}4$

$=\lim_{x\to1}x^2-3\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}4$

$=1-3+4=\mathbf{2}$

(2) $\lim_{x\to2}(x-1)(x^2+1)$

$=\lim_{x\to2}(x-1)\lim_{x\to2}(x^2+1)$

$=(\lim_{x\to2}x-\lim_{x\to2}1)(\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}1)$

$=(2-1)\times(4+1)=\mathbf{5}$

(3) $\lim_{x\to-1}\frac{3x}{2x-1}=\frac{\lim_{x\to-1}3x}{\lim_{x\to-1}(2x-1)}$

$=\frac{3\lim_{x\to-1}x}{2\lim_{x\to-1}x-\lim_{x\to-1}1}$

$=\frac{-3}{-2-1}=\mathbf{1}$

(4) $\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to-2}(2x+1)}{\lim_{x\to-2}(x^2+1)}$

$=\frac{2\lim_{x\to-2}x+\lim_{x\to-2}1}{\lim_{x\to-2}x^2+\lim_{x\to-2}1}$

$=\frac{-4+1}{4+1}=\boldsymbol{-\frac{3}{5}}$

22

02 함수의 극한값의 계산

알 아 보 기 / 여러 가지 꼴의 함수의 극한값을 구하는 방법을 알아보자.

극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$일 때에는 인수분해 또는 유리화를 이용하여 주어진 식을 변형한 다음 극한값을 구한다.

또 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때에도 주어진 식을 변형하여 극한값을 구한다.

함 께 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 19쪽

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

풀이

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x-3)=-2$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

$x\to a$일 때, $\frac{0}{0}$ 꼴이면
(1) 분모, 분자를 인수분해하여 기약분수식으로 만든다.
(2) 근호가 들어 있는 쪽을 유리화한다.

2 극한값 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$을 구하여라.

풀이

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1-(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x+1}=-1$

$x\to a$일 때, $0\times\infty$ 꼴이면 $\frac{0}{0}$ 꼴의 식으로 변형한다.

알아보기 / 해설

• $x\to a$일 때, 상수함수 $y=c$와 일차함수 $y=x$의 극한값 및 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 모든 다항함수의 극한값을 구할 수 있다.
또 $x=a$에서 분모가 0이 아닌 분수함수의 극한값도 구할 수 있다.

• $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)$
에 함수의 극한에 대한 성질을 적용했을 때,

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\times\infty$$

등의 꼴이 되면 이를 부정형이라고 한다.

(i) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$일 때,
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 부정형으로 함수의 극한에 대한 성질을 직접 적용하여 구할 수 없다.
이 경우에는 먼저 주어진 식을 인수분해 또는 유리화하여 식을 변형한 다음에 극한값을 구한다.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때,
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형으로 함수의 극한에 대한 기본 성질을 직접 적용하여 구할 수 없다.
이 경우에는 먼저 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 주어진 식을 변형한 다음에 극한값을 구한다.

(iii) $\infty-\infty$ 또는 $0\times\infty$ 꼴의 부정형은 먼저 유리화 또는 통분을 이용하여 $\dfrac{0}{0}$ 또는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 식으로 변형한 다음에 극한값을 구한다.

• 대부분의 함수의 극한값을 계산하는 문제는 두 개 이상의 함수의 사칙계산으로 이루어져 있기 때문에 함수의 극한에 대한 성질 (2)~(5)를 이용하게 된다.

함께하기 / 해설

1 인수분해 또는 유리화를 이용하여 주어진 식을 변형한 다음에 극한값을 구한다.

2 분모를 통분한 다음에 극한값을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^2+x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-2)}{x(x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{-2}{1} = \mathbf{-2}$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} (x-2)$

$= -1-2 = \mathbf{-3}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$= \dfrac{2+2}{3+3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$= \dfrac{2}{1+1} = \mathbf{1}$

2 (1) $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)\left(1-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 2} \left\{(x-2)-\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}\right\}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \left(x-2-\dfrac{1}{x+2}\right) = \mathbf{-\dfrac{1}{4}}$

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+3x+5}{x^2+2}$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

$x \to \infty$일 때

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴이면 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나눈다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴인 무리식이면 무리식을 유리화한다.

풀이

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+3x+5}{x^2+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}}$

$= \dfrac{2}{1} = \mathbf{2}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$

$= \dfrac{1}{1+1} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

스스로 하기 /

익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 19쪽

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^2+x}$ (2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ (4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)\left(1-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{4}\right\}$

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+x+1}$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{4}\right\}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left\{\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-x(x+4)}{4(x+2)^2}\right\}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-(x+4)}{4(x+2)^2} = \mathbf{-\dfrac{1}{4}}$

3 (1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+x+1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \mathbf{0}$

알 아 보 기 / 분수함수의 극한값의 성질을 활용하여 보자.

분수함수의 극한에서 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot 0=0$$

이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이어야 한다.

이를 이용하여 수렴하는 분수함수의 극한에 대하여 알아보자.

함 께 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 19쪽

4 등식 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=4$가 성립하도록 두 상수 a, b의 값을 정하여라.

풀이

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=a+2$$

이므로 $a+2=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-3$

스 스 로 하 기 / 익힘책 17쪽 | 익힘책 18쪽 | 익힘책 19쪽

4 다음 등식이 성립하도록 두 상수 a, b의 값을 정하여라.

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$ (2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x-2}=\frac{1}{2}$

알아보기 / 해설

분수함수의 극한에서

• $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때,

(i) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이어야 한다.

(ii) $\alpha\neq 0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이어야 한다.

• $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)일 때,

(i) $\alpha=0$이면 $\{f(x)$의 차수$\}<\{g(x)$의 차수$\}$

(ii) $\alpha\neq 0$이면 $\{f(x)$의 차수$\}=\{g(x)$의 차수$\}$

스스로 하기 / 풀이

4 (1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=5$에서

$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$

$4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ······㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2+a)=4+a=5$$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$\boldsymbol{a=1,\ b=-6}$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x-2}=\frac{1}{2}$에서

$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}+b)=0$

$\sqrt{2+a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{2+a}$ ······㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+a)-(2+a)}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{1}{\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \sqrt{2+a}=1$ ······㉡

㉠, ㉡에서

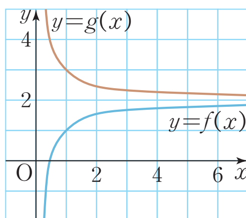
$\boldsymbol{a=-1,\ b=-1}$

알아보기 / 해설

$x>0$일 때, 두 함수

$$f(x)=2-\frac{1}{x},\ g(x)=2+\frac{1}{x}$$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립함을 알 수 있다.

그런데 $\lim_{x\to\infty} f(x)=2,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)$$

가 성립한다.

즉, $f(x)<g(x)$이지만

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)$$

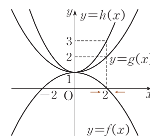
가 될 수도 있음을 알 수 있다.

25

03 함수의 극한의 대소 관계

알 아 보 기 / 함수의 극한의 대소 관계를 알아보자.

세 함수 $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$, $g(x)=1+\frac{x^2}{4}$, $h(x)=1+\frac{x^2}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le g(x)\le h(x)$가 성립함을 알 수 있다.



또 부등식

$\lim_{x\to 2} f(x)\le \lim_{x\to 2} g(x)\le \lim_{x\to 2} h(x)$가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 수열의 극한과 마찬가지로 함수의 극한에서도 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

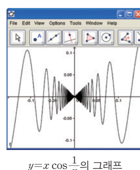
함수의 극한의 대소 관계는 $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때에도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이고 $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이다.



$y=x\cos\frac{1}{x}$의 그래프

| 보기 | 극한값 $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$을 구하면 다음과 같다.

$x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$이므로

$\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|$ $\quad\therefore -|x|\le x\cos\frac{1}{x}\le|x|$

그런데 $\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로 $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$

스 스 로 하 기 /  익힘책 17쪽 |  익힘책 18쪽 |  익힘책 19쪽

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0} \sin x\cos\frac{1}{x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여

$-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$이므로

$-|\sin x|\le\sin x\cos\frac{1}{x}\le|\sin x|$

그런데

$\lim_{x\to 0}(-|\sin x|)=\lim_{x\to 0}|\sin x|=0$

이므로

$\lim_{x\to 0}\sin x\cos\frac{1}{x}=\mathbf{0}$

(2) 모든 실수 x에 대하여

$-1\le\sin x\le 1$

이므로 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여

$-\frac{1}{|x|}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{|x|}$

그런데

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{0}$

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
좌극한, 우극한, $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$

_1. 함수의 극한

극한값의 계산

계산

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{3x^2+x+1}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)$

좌극한과 우극한

계산

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}$　　(2) $\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}$

극한의 성질의 활용

이해

3 등식 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+3}{x-1}=b$가 성립하도록 두 상수 a, b의 값을 정하여라.

함수의 극한의 대소 관계

이해

4 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+8x-8$일 때, 함수 $h(x)$가 모든 x에 대하여 부등식

$$g(x)\le h(x)\le f(x)$$

를 만족한다. 이때, 극한값 $\lim_{x\to 2}h(x)$를 구하여라.

전기의 흐름



문제 해결

5 꺼져 있던 전기 스위치를 시각 $t=a$에서 켤 때, 전기의 흐름을 함수

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t\ge a)\\ 0 & (0\le t<a)\end{cases}$$

로 나타내기로 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $H(t)$의 그래프를 그려라.

(2) 극한값 $\lim_{t\to a-0}H(t)$, $\lim_{t\to a+0}H(t)$를 각각 구하여라.

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+3)=\mathbf{4}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3)=\mathbf{6}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{3x^2+x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2-(x+2)}{2(x+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+2)}=\mathbf{-\frac{1}{4}}$

2 (1) $\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x-2}=\mathbf{1}$

(2) $\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-0}\frac{-(x-2)}{x-2}=\mathbf{-1}$

3 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+3)=0$

$1^2+1\cdot a+3=a+4=0$　$\therefore$ $\boldsymbol{a=-4}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2$　$\therefore$ $\boldsymbol{b=-2}$

4 $g(x)\le h(x)\le f(x)$이므로

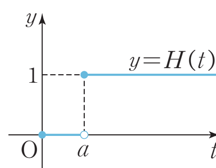
$\lim_{x\to 2}g(x)\le\lim_{x\to 2}h(x)\le\lim_{x\to 2}f(x)$

$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}(-x^2+8x-8)$

$=-2^2+8\cdot 2-8=4$

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}x^2=4$　$\therefore$ $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}h(x)=4}$

5 (1)



(2) $\lim_{t\to a-0}H(t)=\lim_{t\to a-0}0=\mathbf{0}$

$\lim_{t\to a+0}H(t)=\lim_{t\to a+0}1=\mathbf{1}$

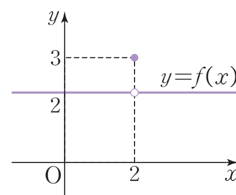
중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.272

01 바탕

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 극한값 $\lim_{x\to 2} f(x)$를 구하여라.



02 바탕

다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}(x+2)$

(2) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)$

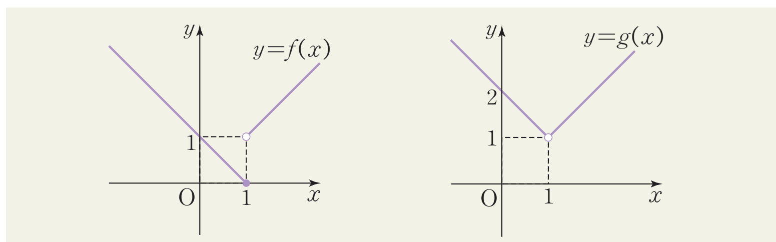
(3) $\lim_{x\to\infty}(2x-5)$

(4) $\lim_{x\to\infty}(-x^2+2)$

좌극한과 우극한이 일치할 때, 극한값이 존재한다.

03 실력

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 극한을 조사하여라.



(1) $\lim_{x\to 1} f(g(x))$

(2) $\lim_{x\to 1} g(f(x))$

04 기본

함수 $f(x)=\dfrac{x+3|x|-4}{3x+|x|+2}$에 대하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

05
실력

$\min(a,\ b)=$(두 실수 $a,\ b$ 중 크지 않은 수)라고 정의할 때, $f(x)=\min(x,\ 1)-\dfrac{x}{1+x}$에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

06
기본

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x+3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{2x^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

07
기본

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to4+0}(\sqrt{x}-2)\left(1-\frac{1}{x-4}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

08
기본

$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}$가 존재하는지 말하여라.

09 실력

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$, $g(x)>0$인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}=\alpha\ (\alpha\text{는 상수})$$

가 성립할 때, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{\log g(x)}{\log f(x)}$를 구하여라.

$x\to 1$일 때,
(분모)$\to 0$이면
(분자)$\to 0$

10 기본

등식 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$가 성립할 때, 실수 a, b, c의 값은?

① $a=-3$, $b=2$, $c=3$
② $a=-2$, $b=2$, $c=3$
③ $a=-1$, $b=1$, $c=2$
④ $a=0$, $b=1$, $c=2$
⑤ $a=1$, $b=1$, $c=3$

11 실력

함수 $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{ax^2+bx+c}$이 다음 세 조건을 만족할 때, 실수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

Ⅰ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ Ⅱ. $\lim_{x\to -1}|f(x)|=\infty$ Ⅲ. $\lim_{x\to 2}|f(x)|=\infty$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

12 기본

임의의 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\frac{2x^2-x+1}{x^2+x}<f(x)<\frac{4x-2}{2x+3}$$

을 만족할 때, 극한값 $\lim_{x\to\infty}f(x)$를 구하여라.

2 함수의 연속

이 단원을 배우면

- 함수의 연속의 뜻을 알 수 있다.
- 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.



1 함수의 연속

소단원의 학습 목표

1. 함수의 연속의 뜻을 안다.
2. 연속함수의 성질을 이해한다.
3. 연속함수의 성질을 활용할 수 있다.

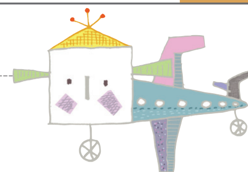
여기서 배우는 용어 및 기호

연속, 불연속, 구간, $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌 구간, 반열린 구간, 연속함수, 최대 · 최소의 정리, 중간값의 정리

28

2 함수의 연속

1 함수의 연속

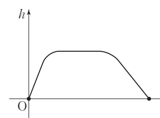


학습 목표
- 연속함수의 연속의 뜻을 안다.
- 연속함수의 성질을 이해한다.
- 연속함수의 성질을 활용할 수 있다.

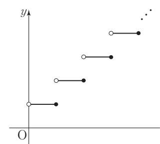
다 가 서 기 / **우주 왕복선과 비행 고도**

지상에서 발사된 우주 왕복선은 고도 350 km 정도에서 지구 궤도를 돌면서 여러 가지 임무를 수행하고, 다시 지구로 귀환한다.

우주 왕복선이 발사된 지 t초 후의 비행 고도를 h km라고 할 때, 발사 때부터 다시 착륙할 때까지 h와 t 사이의 관계를 그래프로 나타내면 그 개형은 오른쪽 그림과 같이 끊어지지 않고 이어진 그래프가 된다.



그러나 이동 전화 요금은 요금제에 따라 t초당 y원으로 정해져 있으므로 t와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같이 끊어진 그래프가 된다.



극한을 이용하면 이러한 함수의 그래프를 직접 그리지 않고도 어느 한 점에서 그 그래프가 이어져 있는지 끊어져 있는지를 판별할 수 있다.



다가서기 / 해설

기온은 시간에 따라 연속적으로 변하므로 기온과 시간 사이의 그래프를 그리면 그래프가 끊어지지 않고 이어진 모양이 된다. 습도 역시 시간에 따라 연속적으로 변하므로 습도와 시간 사이의 그래프는 이어진 모양이 된다. 이때, 기온이나 습도는 시각에 따라 연속적으로 변하지만 계속하여 측정하는 것은 아니기 때문에 불연속인 것처럼 나타난다. 그러나 이를 매끄러운 곡선으로 연결할 수 있으므로 이어진 그래프로 보아야 한다.

또한 비이커에 물을 넣고 끓였다가 식힐 때에도 시간과 물의 온도 사이의 그래프를 그리면 이어진 모양이 되며, 움직이는 물체의 시간에 대한 움직인 거리나 위치 관계, 나이에 따른 키와 몸무게의 변화 등도 이어진 그래프가 된다.

그러나 무게와 소포의 요금 사이의 관계나 이동거리와 열차 요금 사이의 관계 등은 구간에 따라 하나의 값이 결정되는 끊어진 그래프가 된다.

이와 같이 두 변수 사이의 관계를 그래프로 나타냈을 때 이어진 그래프가 되는 경우와 끊어진 그래프가 되는 경우가 있다. 이때, 함수의 식과 극한의 개념을 이용하면 그래프를 직접 그리지 않고도 이어진 그래프인지 끊어진 그래프인지를 쉽게 판단할 수 있다.

이 단원에서는 연속함수에 대하여 알아보고, 연속함수의 성질, 특히 최대 · 최소의 정리와 중간값의 정리를 이해한다. 또 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 방법을 학습하게 된다.

01 함수의 연속성

탐구하기 / 연속과 불연속

다음 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 물음에 답하여 보자.

$$f(x)=x+1,\ g(x)=\frac{1}{x-1},\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

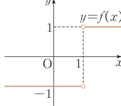
1. 세 함수의 그래프를 좌표평면에 그려 보아라.
2. $x=1$에서 함숫값이 정의되는 함수를 모두 말하여라.
3. $x \to 1$일 때, 극한값이 존재하는 함수를 모두 말하여라.
4. $x=1$에서의 함숫값과 $x \to 1$일 때의 극한값이 서로 같은 함수를 말하여라.

알아보기 / 함수의 연속과 불연속에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$의 그래프가 $x=1$에서 연결되어 있는지를 알아보자.

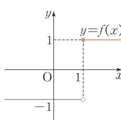
(1) 함수 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$일 때,

이 함수는 $x=1$에서 정의되어 있지 않고, 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 그래프가 연결되어 있지 않다.



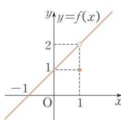
(2) 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$일 때,

$f(1)=1$이지만 극한값 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않고, 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 그래프가 연결되어 있지 않다.



(3) 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$일 때,

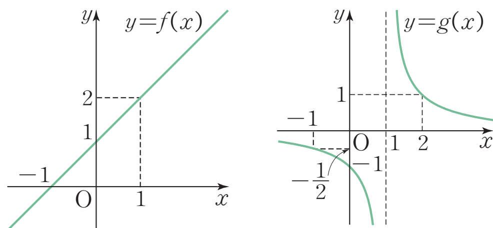
$f(1)=1$이고 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$이지만 $f(1)\neq\lim\limits_{x\to1}f(x)$이고, 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 연결되어 있지 않다.

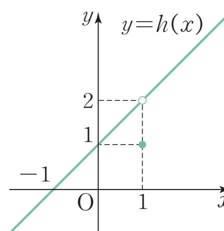


탐구하기 / 풀이

함수의 그래프가 어떤 점에서 끊어지지 않은 경우와 끊어진 경우를 비교함으로써, 연속의 개념을 직관적으로 도입하기 위한 탐구활동이다. 이와 함께 한 점에서의 함숫값의 존재 여부와 극한값의 존재 여부 및 함숫값과 극한값의 일치 여부를 확인함으로써, 연속의 정의에 대한 정확한 의미를 알아보자.

1. 세 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.





2. $f(1)=2$, $h(1)=1$이므로 구하는 함수는 $\boldsymbol{f(x), h(x)}$이다.

3. (i) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

(ii) $\lim\limits_{x\to1+0}g(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to1-0}g(x)=-\infty$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to1}g(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $\lim\limits_{x\to1}h(x)=2$

따라서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하는 함수는 $\boldsymbol{f(x), h(x)}$이다.

4. $f(1)=2$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$이므로 구하는 함수는 $\boldsymbol{f(x)}$이다.

위의 세 함수 중 $f(x)$의 그래프는 끊어지지 않고 연결되어 있으나 $g(x)$와 $h(x)$의 그래프는 $x=1$에서 연결되어 있지 않고 끊어져 있다. 함수가 어떤 점에서 연속이라고 하는 것은 직관적으로 그 점에서 그래프가 끊어지지 않을 때를 뜻한다.

알아보기 / 해설

- 함수가 불연속인 경우는 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

  (1)과 같이 함숫값이 정의되어 있지 않을 때

  (2)와 같이 함숫값은 정의되어 있지만 극한값이 존재하지 않을 때

  (3)과 같이 함숫값이 정의되어 있고 극한값이 존재하지만 두 값이 서로 같지 않을 때

30

그러나 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$$

라고 하면 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 연결되어 있고, 다음이 성립한다.

$$f(1)=2,\ \lim_{x\to1}f(x)=2 \qquad \therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 이 함수의 그래프는 $x=a$에서 끊어지지 않는다.

> (1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.
> (2) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
> (3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

또 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉, 위의 세 조건 중에서 어느 하나라도 만족하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

| 보기 | 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x} & (x\neq0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$ 일 때

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2,\ f(0)=1$$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

1 다음 함수의 [ ]안의 점에서의 연속 또는 불연속을 조사하여라.

(1) $f(x)=|x-1|$ $[x=1]$

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ $[x=0]$

• 연속의 조건 중 (3)이 성립하려면 반드시 (1), (2)가 먼저 성립해야 한다. 따라서 연속의 정의를 (3)만으로 할 수 있다.

• 함수 $f(x)$의 경우 조건 (3)은

'$\{x_n\}$이 a로 수렴하는 수열이면
$\{f(x_n)\}$은 $f(a)$로 수렴한다.'

를 이용해도 된다.

보충 학습

함수 $f(x)$가 어떤 점 $x=a$에서 불연속인 경우를 다음과 같이 나누어 볼 수 있다.

(1) $x=a$에서의 함숫값을 정의하거나 다시 정의함으로써 그 점에서 연속이 되도록 할 수 있는 경우가 있다. 예를 들어 다음 함수를 생각하자.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

여기서 $f(1)=2$라고 다시 정의하면 함수 $f(x)$는 그 점에서 연속이다. 이런 경우를 제거 가능한 불연속(removable discontinuity)이라고 한다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$과 같이 $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 존재하지만 서로 다른 경우가 있다.

(3) 함수 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$과 같이 $x=0$에서의 좌극한도 존재하지 않고 우극한도 존재하지 않는 경우가 있다.

(4) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$과 같이 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때 무한대로 발산하는 경우가 있다.

위에서 (2), (3), (4)의 경우를 본질적 또는 진성 불연속(essential discontinuity)이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) (i) $f(1)=|1-1|=0$

(ii) $\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}|x-1|=0$

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}|x-1|=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=0$

(iii) $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) (i) $f(0)=0+1=1$

(ii) $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(x+1)=1$

$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}x=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 $f(x)$는 불연속이다.

31

02 연속함수의 뜻

알아보기 / 구간에 대하여 알아보자.

두 실수 a와 b $(a<b)$에 대하여

$\{x|a\le x\le b\}$, $\{x|a\le x<b\}$

$\{x|a<x\le b\}$, $\{x|a<x<b\}$

와 같은 실수의 집합을 **구간**이라고 한다.

그리고 위의 구간을 각각 기호로

$[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)

와 같이 나타낸다.

이때, $[a, b]$를 **닫힌 구간**, (a, b)를 **열린 구간**, $[a, b)$와 $(a, b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라고 한다.

또 실수의 집합

$\{x|x\le a\}$, $\{x|x<a\}$

$\{x|x\ge a\}$, $\{x|x>a\}$

도 모두 구간이라고 한다.

그리고 위의 구간을 각각 기호로

$(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$

$[a, \infty)$, (a, ∞)

와 같이 나타낸다.

특히 실수 전체의 집합을 기호로 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

구간을 이용하면 함수의 정의역을 간편하게 나타낼 수 있구나!

| 보기 | (1) $\{x||x|\le 1\}$인 실수 x의 집합은 구간 $[-1, 1]$이다.
(2) 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 정의역은 구간 $[1, \infty)$이다.

스스로 하기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

1 다음 집합의 구간을 기호로 나타내어라.

(1) $\{x|-1\le x\le 4\}$ (2) $\{x|-2\le x<5\}$

(3) $\{x|2<x\le 6\}$ (4) $\{x|x>3\}$

2 다음 함수의 정의역의 구간을 기호로 나타내어라.

(1) $y=\log(x-2)$ (2) $y=\sqrt{4-x^2}$

알아보기 / 해설

• 구간이란 두 실수 a, b $(a<b)$ 사이에 있는 실수의 집합을 말한다. 이때, a, b를 양 끝이라고 한다.

구간에는 a, b를 모두 포함하는 닫힌 구간, a와 b 중에서 한 쪽만 포함하는 반닫힌 구간(또는 반열린 구간), 그리고 a, b 모두 포함하지 않는 열린 구간이 있다.

이를 수직선에 나타냈을 때,

(i) 닫힌 구간은 양 끝 점을 포함하는 선분

(ii) 반닫힌 구간은 한 쪽 끝 점만을 포함하는 선분

(iii) 열린 구간은 양 끝 점을 포함하지 않는 선분

을 나타낸다. 이때, $b-a$를 구간의 길이라고 한다.

한편 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$는 무한 구간이라고 한다.

• 구간의 기호는 하나의 수직선 위의 점의 집합으로 실수의 부분집합을 나타내는 것이다.

예를 들면

$[a, b]=\{x|a\le x\le b\}$

$(a, b)=\{x|a<x<b\}$

$(a, b]=\{x|a<x\le b\}$

$[a, b)=\{x|a\le x<b\}$

와 같다.

열린 구간 (a, b)와 순서쌍 (a, b)는 같은 기호를 사용하므로 혼동하지 않도록 주의한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $[-1, 4]$ (2) $[-2, 5)$

(3) $(2, 6]$ (4) $(3, \infty)$

2 (1) $x-2>0$에서 $x>2$

$\therefore (2, \infty)$

(2) $4-x^2\ge 0$에서 $-2\le x\le 2$

$\therefore [-2, 2]$



Plus 문제

다음 함수의 정의역을 구간으로 나타내어라.

(1) $f(x)=\sqrt{x-3}$ (2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (4) $f(x)=|x-1|$

| 풀이 |

(1) $x\ge 3$이므로 $[3, \infty)$

(2) $x\ne -1$이므로 $(-\infty, -1)\cup(-1, \infty)$

(3) $-1\le x\le 1$이므로 $[-1, 1]$

(4) x는 모든 실수이므로 $(-\infty, \infty)$

스스로 하기 / 풀이

3 (1) 모든 실수에서 연속이므로

$(-\infty,\ \infty)$

(2) $y=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$

에서 점근선은 $x=1$, $y=1$이므로 $x=1$일 때 불연속이고, $x\neq1$일 때 연속이다.

$\therefore$ **$(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$**

(3) $y=\sqrt{x+1}$의 정의역은 구간 $[-1,\ \infty)$이며 $x>-1$인 모든 x에서 연속이다.

또 $x=-1$에서

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\sqrt{x+1}$$
$$=0$$
$$=f(-1)$$

이 성립한다.

$\therefore$ **$[-1,\ \infty)$**

(4) 로그함수의 정의에 의하여 정의역은 구간 $(1,\ \infty)$이며 $x>1$인 모든 x에서 연속이다.

$\therefore$ **$(1,\ \infty)$**

4 $0<a<1$이라고 하면

$$f(a)=\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}$$
$$=a+1$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+1)$$
$$=a+1$$

$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 연속이다.

32

알 아 보 기 / 연속함수에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 **연속함수**라고 한다.

함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

> (1) $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.
> (2) $\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-0}f(x)=f(b)$

즉, 어떤 구간에서 연속인 함수의 그래프는 그 구간에서 끊어지지 않고 이어진 하나의 곡선이 된다.

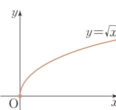
| 참고 | 구간 $[a,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ \infty)$에서 연속이라는 것은 $f(x)$가 구간 $(a,\ \infty)$에서 연속이고 $\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)$가 성립하는 것이다.

| 보기 | (1) 일차함수와 이차함수 및 삼각함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$는 모두 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이고, 임의의 구간 $[a,\ b]$에서도 연속이다.

(2) 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 정의역은 구간 $[0,\ \infty)$이며 $x>0$인 모든 x에서 연속이다. 또 $x=0$에서

$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=f(0)=0$

이 성립한다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 연속이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

3 다음 함수가 연속이 되는 구간을 구하여라.

(1) $y=|x|+2$ (2) $y=\dfrac{x}{x-1}$

(3) $y=\sqrt{x+1}$ (4) $y=\log(x-1)$

4 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 구간 $(0,\ 1)$에서 연속임을 보여라.



Plus 문제

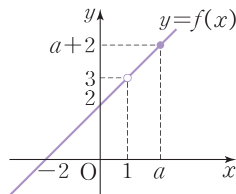
함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$의 연속성을 조사하여라.

| 풀이 |

$a\neq1$인 모든 실수 a에 대하여

$$f(a)=\frac{a^2+a-2}{a-1}=a+2$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+2)$$
$$=a+2$$



$\therefore \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

따라서 함수 $f(x)$는 **$x\neq1$인 모든 점에서 연속이다.**

또한 $x=1$에서 $f(x)$는 정의되지 않으므로 **$x=1$에서 불연속**이다.

33

03 연속함수의 성질

탐 구 하 기 / 연속함수의 성질

두 연속함수 $f(x)=2x+1$과 $g(x)=x^2$에 대하여 다음 표를 완성하여 보자.

$f(x)+g(x)$	$f(1)+g(1)$	$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$	$x=1$에서 연속 판별
x^2+2x+1			연속

$f(x)g(x)$	$f(1)g(1)$	$\lim_{x\to1} f(x)g(x)$	$x=1$에서 연속 판별
$(2x+1)x^2$	3		

$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(1)}{g(1)}$	$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$	$x=1$에서 연속 판별
$\frac{2x+1}{x^2}$		3	

$f(g(x))$	$f(g(1))$	$\lim_{x\to1} f(g(x))$	$x=1$에서 연속 판별
$2x^2+1$	3		

알 아 보 기 / 연속함수의 성질을 알아보자.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함숫값 $f(a)$와 $g(a)$ 및 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재하고

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

가 성립한다.

이때, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 함숫값 $f(a)+g(a)$를 가지며, 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

또 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 함숫값 $f(a)g(a)$를 가지며, 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

탐구하기 / 풀이

$f(1)+g(1)=1+2+1=4$

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=1+2+1=4$

$\therefore f(1)+g(1)=\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$

따라서 $x=1$에서 $f(x)+g(x)$는 연속이다.

$f(x)+g(x)$	$f(1)+g(1)$	$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$	$x=1$에서 연속 판별
x^2+2x+1	**4**	**4**	연속

$f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$인 경우에도 같은 방법으로 구하여 표를 완성하면

$f(x)g(x)$	$f(1)g(1)$	$\lim_{x\to1} f(x)g(x)$	$x=1$에서 연속 판별
$(2x+1)x^2$	3	**3**	**연속**

$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(1)}{g(1)}$	$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$	$x=1$에서 연속 판별
$\frac{2x+1}{x^2}$	**3**	3	**연속**

$f(g(x))$	$f(g(1))$	$\lim_{x\to1} f(g(x))$	$x=1$에서 연속 판별
$2x^2+1$	3	**3**	**연속**

알아보기 / 해설

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 필요충분조건은 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.
- 함수의 극한에 관한 성질을 이용하여

$$kf(x)\ (k\text{는 상수}),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq0)$$

에도 다음과 같이 생각할 수 있다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 하자.

그러면 상수 k에 대하여 함수 $kf(x)$는 $x=a$에서 정의되고 $x=a$에서의 함숫값은 $kf(a)$이며, 함수의 극한에 관한 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\{kf(x)\}=k\lim_{x\to a} f(x)=kf(a)$$

따라서 함수 $kf(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $g(a)\neq0$이라고 하자.

그러면 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 정의되고 $x=a$에서의 함숫값은 $\frac{f(a)}{g(a)}$이며, 함수의 극한에 관한 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이다.

보충 학습

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 연속이면 합성함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다. 예를 들어 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2-4$에 대하여 $f(x)=\frac{1}{x}$은 $x=0$을 제외한 모든 실수에서 연속이고, $g(x)=x^2-4$는 모든 실수에서 연속이다. 이때,

(1) 합성함수 $g(f(x))=\{f(x)\}^2-4$는 $f(x)=\frac{1}{x}$이 연속일 때, 즉 $x=0$을 제외한 모든 실수 x에서 연속이다.
그러므로 $g(f(x))$가 연속인 x값의 범위는 $x<0$, $x>0$

(2) 합성함수 $f(g(x))=\frac{1}{g(x)}$은 $g(x)=x^2-4=0$, 즉 $x=\pm2$를 제외한 모든 실수 x에서 연속이다.
그러므로 $f(g(x))$가 연속인 x값의 범위는 $x<-2$, $-2<x<2$, $x>2$

일반적으로 연속함수에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

연속함수의 성질

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

[1] $kf(x)$ (단, k는 상수) [2] $f(x)\pm g(x)$

[3] $f(x)g(x)$ [4] $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq0$)

함 께 하 기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

1 삼차함수 $y=3x^3+2x^2+x+1$은 모든 실수 x에서 연속임을 보여라.

증명

상수함수 $y=1$과 일차함수 $y=x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질 [3]에 의하여 함수 $y=x^2$, $y=x^3$은 모든 실수 x에서 연속이다.
이들 함수에 상수를 곱하여 더하면 삼차함수 $y=3x^3+2x^2+x+1$을 얻을 수 있다.
따라서 연속함수의 성질 [1]과 [2]에 의하여 주어진 삼차함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

1 다항함수 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$은 모든 실수 x에서 연속임을 보여라. (단, a_i는 상수, $i=0, 1, \cdots, n$)

2 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

(1) $y=(x+1)(x-1)^3$ (2) $y=\sin x\cos x$

(3) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ (4) $y=\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

스스로 하기 / 풀이

1 일차함수 $y=x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질 [1]과 [3]에 의하여
$y=a_1x$, $y=a_2x^2$, $y=a_3x^3$, $\cdots$, $y=a_nx^n$
(a_i는 상수, $i=1, 2, 3, \cdots, n$)은 모든 실수 x에서 연속이다. 또 상수함수 $y=a_0$도 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속함수의 성질 [2]에 의하여 주어진
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
은 모든 실수 x에서 연속이다.

2 연속함수의 성질 [1]～[4]에 의하여

(1) $y=x+1$, $y=(x-1)^3$이 모든 실수 x에서 연속이므로 $y=(x+1)(x-1)^3$은 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) $y=\sin x$, $y=\cos x$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $y=\sin x\cos x$는 모든 실수 x에서 연속이다.

(3) $y=x-1$, $y=x^2+1$은 모든 실수 x에서 연속이고 $x^2+1\neq0$이므로 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$은 모든 실수 x에서 연속이다.

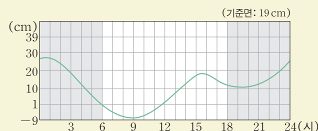
(4) $y=x^2$, $y=(x+1)(x-1)$은 모든 실수 x에서 연속이므로 $y=\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$은 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 실수 x에서 연속이다.

35

04 최대·최소의 정리

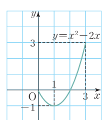
탐구하기 / 해수면의 높이

다음 그래프는 어느 지역에서 하루 동안의 시각에 따른 해수면의 높이를 나타낸 것이다. 이 날의 시간을 구간으로 나타낼 때, 주어진 구간에서 해수면의 높이의 최댓값과 최솟값이 존재하는지 말하여 보자.



1. [3, 11]　　2. (12, 18)

알아보기 / 최대·최소의 정리를 알아보자.



구간 $[0,\ 3]$에서 연속인 함수 $f(x)=x^2-2x$의 치역은 구간 $[-1,\ 3]$이므로 최댓값은 $x=3$일 때 3이고, 최솟값은 $x=1$일 때 -1이다.

그러나 구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $f(x)=x^2-2x$의 치역은 구간 $[-1,\ 3)$이므로 최댓값은 없고, 최솟값은 $x=1$일 때 -1이다.

일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **최대·최소의 정리**가 성립한다.

함수 $f(x)$의 정의역이 닫힌 구간이 아니면 일반적으로 최대·최소의 정리가 성립하지 않는다.

> **최대·최소의 정리**
> 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

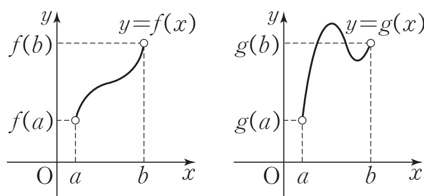
스스로 하기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

1 다음 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.
(1) $f(x)=x^2-2x+3$ $[0,\ 3]$　　(2) $f(x)=\sin x$ $[0,\ \pi]$

참고 | 최대 · 최소의 정리

최대 · 최소의 정리는 주어진 함수가 닫힌 구간에서 연속일 때에만 성립한다.

예를 들어 아래의 그림과 같이 열린 구간 $(a,\ b)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않고, $g(x)$는 최댓값은 갖지만 최솟값은 갖지 않는다.



또 $x=1$에서 불연속인 다음 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (0\le x<1) \\ x+2 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

는 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 정의되어 있지만, 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

탐구하기 / 풀이

1. 해수면의 높이는 구간 $[3,\ 11]$에서 3시일 때 최대, 9시일 때 최소이므로 구간 $[3,\ 11]$에서 **최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.**
2. 해수면의 높이는 구간 $(12,\ 18)$에서 15시 30분일 때 최대, 12시일 때 최소이므로 구간 $(12,\ 18)$에서 **최댓값은 존재하고, 최솟값은 존재하지 않는다.**

알아보기 / 해설

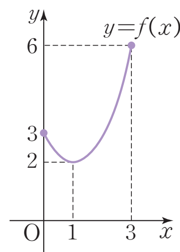
닫힌 구간에서 연속인 함수 $y=f(x)$는 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때, 구간의 모든 x의 값에 대한 y의 값 중에서 가장 큰 것이 최댓값이고, 가장 작은 것이 최솟값이다.

스스로 하기 / 풀이

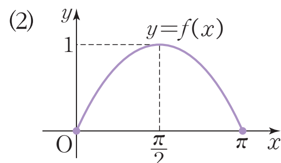
1 (1) $f(x)=x^2-2x+3$
$=(x-1)^2+2$

최댓값: $f(3)=\mathbf{6}$

최솟값: $f(1)=\mathbf{2}$



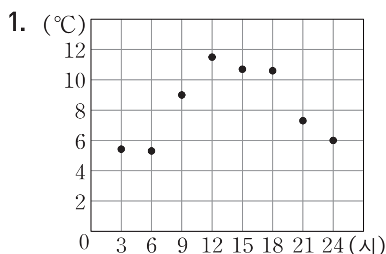
(2)

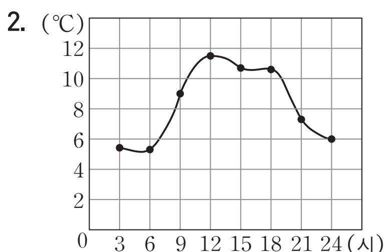


최댓값: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathbf{1}$

최솟값: $f(0)=f(\pi)=\mathbf{0}$

탐구하기 / 풀이

1.


2.


3. 기온은 시간에 따라 연속적으로 변하므로 물음 2의 그래프에서 기온이 6.6 ℃인 시각이 하루에 적어도 2번 있었음을 알 수 있다.

36

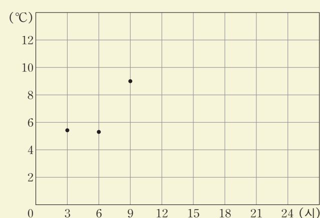
05 중간값의 정리

탐 구 하 기 / 기온 변화

다음 표는 어느 지역의 기온을 새벽 3시부터 자정까지 세 시간 간격으로 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

시각(시)	3	6	9	12	15	18	21	24
기온(℃)	5.4	5.3	9.0	11.5	10.7	10.6	7.3	6.0

기온은 시간의 흐름에 따라 연속적으로 변하므로 기온과 시간 사이의 관계를 그래프로 나타내면 연속인 그래프가 된다.

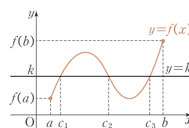


1. 시간에 따른 기온을 위의 그래프 위에 점으로 나타내어라.
2. 물음 1에서 표시된 점을 연결하여 기온 변화를 곡선으로 나타내어라.
3. 이날 이 지역의 일평균 기온은 6.6 ℃이었다. 기온이 일평균 기온과 일치하는 시각이 하루에 적어도 몇 번 있었는지 말하여라.

알 아 보 기 / 중간값의 정리를 알아보자.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $y=f(x)$의 그래프는 그 구간에서 끊어지지 않고 이어져 있다.

따라서 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 적어도 한 점에서 만난다.



보충 학습

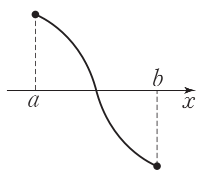
함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 두 점 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\neq f(x_2)$일 때, $f(x_1)$과 $f(x_2)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 x_1과 x_2 사이의 적당한 c가 존재하여 $f(c)=k$가 성립하면 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 '중간값의 성질'을 가진다고 한다.

중간값의 정리에 의하여 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 그 구간에서 중간값의 성질을 가진다. 하지만 그 역은 성립하지 않는다.

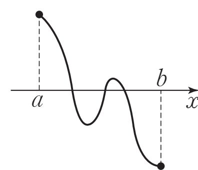
예를 들어 함수 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (0<x\leq 1)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$은 중간값의 성질을 가진다. 그러나 $f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이 아니다.

알아보기 / 해설

- 중간값의 정리는 구체적인 조건을 만족하는 c를 구하는 정리가 아니라 c의 존재성을 확인하는 정리이다.
- 중간값의 정리에서 근의 개수는 알 수 없다.



|그림1|



|그림2|

위의 두 그림을 보면 모두 중간값의 정리를 만족한다. 그러나 |그림1|에서는 1개의 근, |그림2|에서는 3개의 근을 갖는다. 이처럼 중간값의 정리만으로는 근의 개수가 몇 개인지 판정할 수 없다. 단지, 적어도 하나의 근이 존재한다는 사실을 보장할 뿐이다.

일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **중간값의 정리**가 성립한다.

중간값의 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

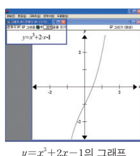
중간값의 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 0은 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값이므로 a와 b 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

| 보기 | 방정식 $x^3+2x-1=0$이 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이자.

$f(x)=x^3+2x-1$로 놓으면 삼차함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3+2x-1=0$의 실근이 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다.



$y=x^3+2x-1$의 그래프

스스로 하기 / 익힘책 24쪽 | 익힘책 25쪽 | 익힘책 27쪽

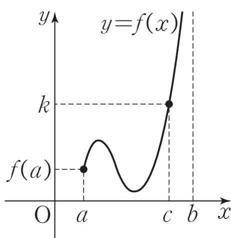
1 함수 $f(x)=3^x$에 대하여 $f(c)=\sqrt{2}$를 만족하는 c가 구간 $(0, 1)$에 반드시 존재함을 보여라.

2 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x^3-3x+1=0$ $(1, 2)$　　(2) $\log_{10} x+x-2=0$ $(1, 2)$

(3) $2^x-3x^2=0$ $(0, 1)$　　(4) $\sin x-x+1=0$ $(0, \pi)$

• 중간값의 정리는 정의역이 닫힌 구간인 경우에만 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 함수 $f(x)$가 반닫힌 구간 $[a, b)$에서 연속이고 $f(b)=\infty$이면 $f(a)<k$인 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



스스로 하기 / 풀이

1 함수 $f(x)=3^x$은 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=1$, $f(1)=3$이다. $1<\sqrt{2}<3$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=\sqrt{2}$를 만족하는 c가 0과 1 사이에 반드시 존재한다.

2 (1) $f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고, $f(1)=-1<0$, $f(2)=3>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x+1=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=\log_{10} x+x-2$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고, $f(1)=-1<0$, $f(2)=\log_{10} 2>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $\log_{10} x+x-2=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(3) $f(x)=2^x-3x^2$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $2^x-3x^2=0$은 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(4) $f(x)=\sin x-x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \pi]$에서 연속이고, $f(0)=1>0$, $f(\pi)=-\pi+1<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 π 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $\sin x-x+1=0$은 구간 $(0, \pi)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

중단원 확인하기 / 풀이

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
연속, 불연속, 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌 구간, 반열린 구간, 연속함수, 최대·최소의 정리, 중간값의 정리, $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)

2. 함수의 연속

함수의 연속 이해

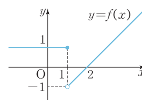
1 다음 함수의 [ ] 안의 점에서의 연속 또는 불연속을 조사하여라.

(1) $f(x)=x^3-x^2+1$ $[x=2]$ (2) $f(x)=\sqrt{x+3}$ $[x=1]$

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ $[x=-1]$ (4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ $[x=0]$

함수의 연속성 이해

2 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=(x+a)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 이때, 상수 a의 값을 구하여라.



최대·최소의 정리 이해

3 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=2x^2-2x+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

중간값의 정리 의사소통

4 삼차방정식 $x(x+1)(x-2)+1=0$의 세 근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라고 할 때, $0<\beta<1$임을 보여라.

등기 소포 요금 문제 해결



5 다음 표는 국내 동일 지역으로의 중량별 등기 소포 요금을 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

(2005. 10. 1. 시행)

중량	2 kg 이하	5 kg 이하	10 kg 이하	20 kg 이하	30 kg 이하
요금	3500원	4000원	5000원	6000원	7000원

(1) 소포의 중량이 x kg일 때의 요금을 $f(x)$원이라고 할 때, 함수 $y=f(x)$ $(0<x\leq 30)$의 그래프를 그려라.

(2) (1)에서 구한 함수의 연속성을 조사하여라.

---

1 (1) $f(2)=2^3-2^2+1=5$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2+1)=5$

따라서 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) $f(1)=\sqrt{1+3}=2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$은 $x=-1$에서 정의되지 않으므로 $x=-1$에서 불연속이다.

(4) $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +0} x=0$

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to -0}(-x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

2 함수 $y=(x+a)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 1}(x+a)f(x)$가 존재한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 1+0}(x+a)f(x)=-(1+a)$

$\lim\limits_{x\to 1-0}(x+a)f(x)=1+a$

에서 $-(1+a)=1+a$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{a=-1}$

3 $f(x)=2x^2-2x+3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 2]$에서 연속이다. 최대 · 최소의 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 2]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

$f(x)=2x^2-2x+3=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$에서

$f(-2)=15$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$, $f(2)=7$

따라서 함수 $f(x)$는 **$x=-2$일 때 최댓값 15, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{2}$**를 가진다.

4 $f(x)=x(x+1)(x-2)+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

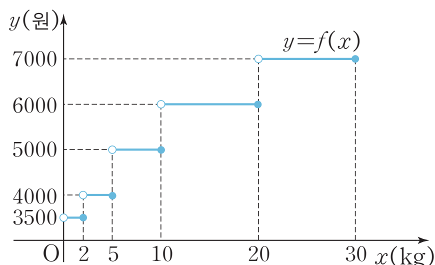
$f(-2)=-7<0$, $f(0)=1>0$,

$f(1)=-1<0$, $f(2)=1>0$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 중간값의 정리에 의하여 구간 $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 실근을 가진다. 이때, $\alpha<\beta<\gamma$이므로 $0<\beta<1$이다.

5 (1) $f(x)=\begin{cases} 7000 & (20<x\le 30) \\ 6000 & (10<x\le 20) \\ 5000 & (5<x\le 10) \\ 4000 & (2<x\le 5) \\ 3500 & (0<x\le 2) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$ $(0<x\le 30)$의 그래프는 다음과 같다.



(2) (1)의 그래프에서 함수 $y=f(x)$는 $x=2,\ 5,\ 10,\ 20$에서 불연속이고, 구간 $(0,\ 2]$, $(2,\ 5]$, $(5,\ 10]$, $(20,\ 30]$에서 연속이다.

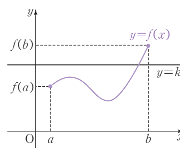
39

수 학 실 험 실

이분법(Bisection method)

연속함수의 성질인 중간값의 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 y축을 지나고 x축에 평행한 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 적어도 한 번 만난다.

따라서 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 방정식 $f(x)=0$의 실근이 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



이상의 성질을 이용하여 구간 $(a,\ b)$의 길이를 절반으로 줄여 나감으로써 $f(x)=0$의 실근에 대한 근삿값을 구할 수 있는데, 이러한 방법을 이분법(bisection method)이라고 한다.

예를 들어 $f(x)=x^3-x-1$이라고 하면 $f(1)=-1<0$이고 $f(2)=5>0$이므로 방정식 $x^3-x-1=0$의 한 실근이 구간 $(1,\ 2)$에 있다.

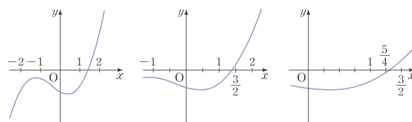
이 근의 근삿값을 다음과 같이 이분법으로 구하여 보자.

- 1과 2의 중점 $\frac{3}{2}$에서 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{8}>0$이므로 근은 구간 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$에 있다.
- 1과 $\frac{3}{2}$의 중점 $\frac{5}{4}$에서 $f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{19}{64}<0$이므로 근은 구간 $\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right)$에 있다.

이를 반복하면 주어진 방정식의 실근은 다음 구간에 있음을 알 수 있다.

$$\left(\frac{5}{4},\ \frac{11}{8}\right),\ \left(\frac{21}{16},\ \frac{11}{8}\right),\ \left(\frac{21}{16},\ \frac{43}{32}\right),\ \left(\frac{21}{16},\ \frac{85}{64}\right),\ \cdots$$

이 과정을 반복함으로써 주어진 방정식의 근에 대한 근삿값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있다.



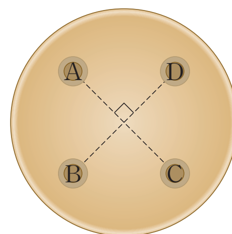
한편 그래프를 그리는 소프트웨어를 이용하면 더 쉽게 근을 찾을 수 있다. 처음에는 대략적으로 큰 구간에 대하여 함수의 그래프를 그린 후, 그래프를 확대해 나가는 아이콘을 이용하여 근의 x좌표를 추정해 나가거나 근을 찾아주는 아이콘을 이용하여 직접 근을 찾을 수도 있다.

수학 이야기 |

식탁을 덜거덕거리지 않게 놓는 방법

일상생활에서 다리가 4개인 식탁이 덜거덕거려서 불편한 경우가 흔히 발생한다. 이것은 4개의 식탁 다리의 길이는 모두 같지만 바닥이 고르지 않아 1개가 떠 있는 상태가 되기 때문이다. 식탁이 덜거덕거리지 않게 하기 위한 방법으로는 식탁을 회전시키는 방법이 있다. 식탁을 잡고 시계 방향이나 반시계 방향으로 바닥 위를 미끄러지게 하면서 $\frac{1}{4}$회전, 즉 90°만큼 회전시키다 보면 그 사이에 네 다리가 모두 바닥에 닿는 경우가 반드시 있게 되어 식탁이 안정된 상태로 놓이게 된다.

여기에는 수학적으로 아주 중요한 원리가 숨어 있다. 다음 그림과 같이 4개의 다리 A, B, C, D 중에서 D가 바닥에 닿지 않고 떠 있는 식탁을 위에서 내려다본 모양이다.



이때, D를 지나는 대각선 위에 있는 B가 뜨지 않도록 한 손으로 A와 B의 중간쯤의 식탁 위를 누르고, 다른 한 손으로 C와 D 사이의 식탁 위를 누른다.

이제, 식탁을 시계 방향으로 $\frac{1}{4}$회전시킬 때, 다리 D의 끝은 바닥에서 떠 있는 상태로부터 출발하여 다리 C가 있었던 위치까지 이동하는 사이에 서서히 바닥에 접근하고, 따라서 $\frac{1}{4}$회전하는 사이에 반드시 바닥에 닿는 경우가 있게 된다.

이와 같은 사실을 보장해 주는 것이 바로 중간값의 정리이다.

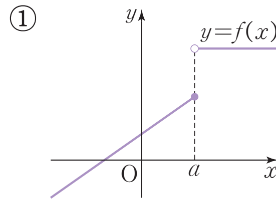
중단원 평가 문제

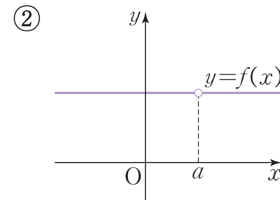


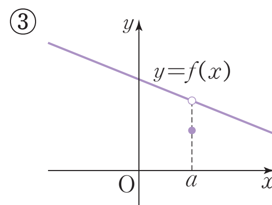
정답과 풀이 p.275

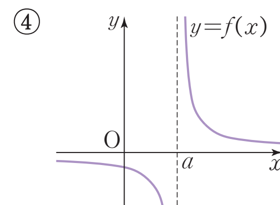
01 바탕

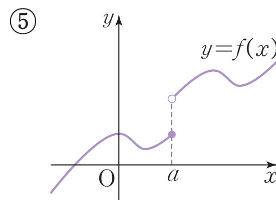
함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하고 $f(a)$가 정의되어 있지만 $x=a$에서 불연속인 것은?

①


②


③


④


⑤


02 기본

함수 $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & (x\geq1) \\ x+1 & (x<1) \end{cases}$ 의 $x=1$에서의 연속 또는 불연속을 조사하여라.

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
⟺ (1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.
(2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
(3) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

03 기본

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+ax+1}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

04 기본

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+5 & (x\geq 1) \\ x+2 & (x<1) \end{cases}$ 가 모든 실수에서 연속이기 위한 상수 a의 값을 구하여라.

05 기본

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x\leq -1,\ x\geq 2) \\ x^2-2x+b & (-1<x<2) \end{cases}$ 가 모든 실수에서 연속일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라.

06 실력

함수 $f(x)=[x]^2-(ax+b)[x]$가 연속함수가 되도록 두 상수 a, b의 값을 정하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

07 실력

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$가 모든 실수에서 연속일 때, 양수 a의 최솟값을 구하여라.

08 바탕

구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=-x^2+2x+2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

함수 $f(x)$가 연속이 아니면 닫힌 구간에서도 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

09 기본

주어진 구간에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값이 있으면 그 값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-2x$ $[-2,\ 2]$

(2) $f(x)=\frac{2}{x-1}$ $[0,\ 2]$

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재함을 이용한다.

10 실력

방정식 $\log x+x-2=0$의 실근이 적어도 하나 존재하는 구간은?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(3,\ 4)$
④ $(4,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 6)$

11 기본

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=-2$, $f(1)=-5$, $f(2)=3$, $f(3)=-1$, $f(4)=2$, $f(5)=3$이다. 다음 중에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다고 말할 수 <u>없는</u> 구간을 모두 고르면?

(정답 2개)

① $(0,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(2,\ 3)$
④ $(3,\ 4)$ ⑤ $(4,\ 5)$

12 기본

다음 보기 중 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식을 골라라.

보기

ㄱ. $x^3-9x+16=0$ ㄴ. $x^4+x^2+1=0$
ㄷ. $3^x-4x=0$

13 실력

두 함수 $f(x)=\log_2 x+ax+1$, $g(x)=2x-3$의 그래프는 구간 $(1,\ 2)$에서 단 한 개의 교점을 갖는다. 이때, 실수 a값의 범위는?

① $-3<a<-2$ ② $-2<a<-\frac{1}{2}$
③ $-\frac{1}{2}<a<1$ ④ $1<a<2$
⑤ $a>2$

대단원 평가 문제



정답과 풀이 p.278

01

함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$에 대하여 다음 극한값의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

$$A=\lim_{x\to 0} f(x),\ B=\lim_{x\to 2} f(x),\ C=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

① $A>B>C$　② $A>C>B$
③ $B>A>C$　④ $C>B>A$
⑤ $C>A>B$

02

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}+\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

03

등식 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$이 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -3　② -2　③ 1
④ 2　⑤ 3

04

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(\log|x^2-1|-\log|x^2+2x-3|)$의 값은?

① $-\log 2$　② $-\log\frac{4}{3}$
③ $-\log\frac{2}{3}$　④ $\log 2$
⑤ $\log 3$

05

방정식 $x^3-x^2-x-1=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간은?

① $(0,\ 1)$　② $(1,\ 2)$　③ $(2,\ 3)$
④ $(3,\ 4)$　⑤ $(4,\ 5)$

06

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+\sqrt{x^2-4x}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1
④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

07

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$일 때, $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{f(\sqrt{x}-2)}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

08

함수 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

09

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x-1<f(x)<2x+1$$

를 만족할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{4x^3+x^2-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

10

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x^2-2x+1}=2$가 성립할 때, 세 상수 a, b, c의 값을 순서대로 적은 것은?

① -1, -1, -1 ② -1, -1, 0

③ -1, -1, 1 ④ 1, -1, -1

⑤ 1, -1, 0

11

x의 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $f(x)$를 구하면?

Ⅰ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$, Ⅱ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$

① $f(x)=x^3+x^2-3x$

② $f(x)=x^3+x^2+2x$

③ $f(x)=2x^3+x^2-3x$

④ $f(x)=2x^3+x^2+2x$

⑤ $f(x)=2x^3+2x^2-3x$

12

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$에 대하여

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=k$일 때, k를 a로 나타내면?

(단, a, b, k는 상수)

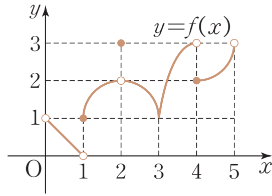
① $k=2(a+3)$ ② $k=2(a+4)$

③ $k=2(a+6)$ ④ $k=3(a+3)$

⑤ $k=3(a+6)$

13

구간 $(0,\ 5)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(x)$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① $\lim_{x\to2}f(x)=2$

② $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 불연속이 되는 x의 값은 3개이다.

④ 구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값을 가진다.

⑤ 구간 $[3,\ 4]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

14

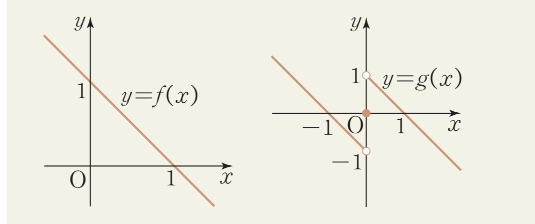
함수 $f(x)=\dfrac{|x+1|-1}{x}$이 $x=0$에서 연속일 때, $f(0)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

15

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $g(f(0))=0$

ㄴ. $\lim_{x\to0}g(f(x))$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16

$x\geq0$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(\sqrt{x}-1)f(x)=x^3-1$$

을 만족할 때, $f(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

17 UP!!

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$의 그래프에서 불연속인 점의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

18 UP!!

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=b$$

를 만족하고 $a>0$, $b>0$일 때, 방정식 $f(x)=0$이 가질 수 있는 실근의 개수의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19 서술형

다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(x)$를 구하여라.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$$

20 서술형

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x+a}{x^{n-1}+1}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.



함수의 극한과 연속

중단원 평가 문제

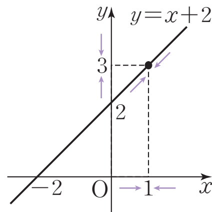
▶ 1. 함수의 극한 / P_28

01 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=2$

답 2

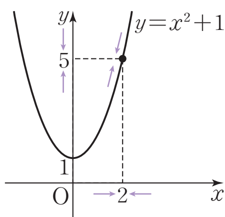
02 (1) $f(x)=x+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}(x+2)=3$

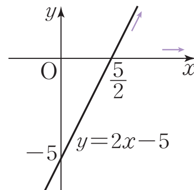
(2) $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

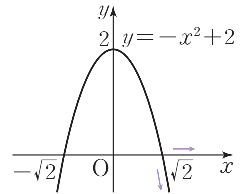
(3) $f(x)=2x-5$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(2x-5)=\infty$

(4) $f(x)=-x^2+2$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(-x^2+2)=-\infty$

답 (1) 3 (2) 5 (3) ∞ (4) $-\infty$

03 (1) $x\to 1+0$일 때, $g(x)\to 1+0$이므로

$\lim_{x\to 1+0} f(g(x))=\lim_{t\to 1+0} f(t)=1$

$x\to 1-0$일 때, $g(x)\to 1+0$이므로

$\lim_{x\to 1-0} f(g(x))=\lim_{t\to 1+0} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(g(x))=1$

(2) $x\to 1+0$일 때, $f(x)\to 1+0$이므로

$\lim_{x\to 1+0} g(f(x))=\lim_{t\to 1+0} g(t)=1$

$x\to 1-0$일 때, $f(x)\to +0$이므로

$\lim_{x\to 1-0} g(f(x))=\lim_{t\to +0} g(t)=2$

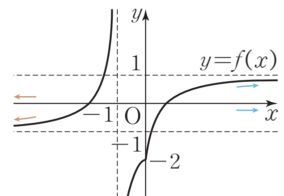
따라서 $\lim_{x\to 1} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) 존재하지 않는다.

04 $f(x)=\dfrac{x+3|x|-4}{3x+|x|+2}$에서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{2x+1} & (x\ge 0)\\[2mm] \dfrac{-x-2}{x+1} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

(2) x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

답 (1) 1 (2) -1

05 (i) $x>1$일 때, $f(x)=1-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}$이므로

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{4}$$

(ii) $x<1$일 때, $f(x)=x-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$이므로

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{x^2}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{2x+1}{2(1+x)}=\frac{3}{4}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=1$$

답 1

06 (1) $\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-1)=-4$

(2) $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}$$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x^2}-1}{2+\frac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

답 (1) -4 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

07 (1) $\lim_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{4}\right)$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{4-(x+1)}{4(x+1)}\right\}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{4(x+1)}=-\frac{1}{16}$$

(2) $\lim_{x\to4+0}(\sqrt{x}-2)\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$$=\lim_{x\to4+0}(\sqrt{x}-2)\left\{1-\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right\}=\lim_{x\to4+0}\left\{(\sqrt{x}-2)-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right\}=-\frac{1}{4}$$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1-x^2)-(1-x)}\times\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=1$$

(4) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이다.

$\therefore \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+1}-t+1)=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-3t+1}+t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1-\frac{1}{t}}$$

$=-\frac{1}{2}$

답 (1) $-\frac{1}{16}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$

08 $x\neq 2$일 때,

$\frac{f(x)-2}{x-2}$

$=\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-2}{x-2}$

$=\frac{2x+2\sqrt{x^2-4(x-1)}-4}{(x-2)(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+2)}$

$=\frac{2(|x-2|+x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+2)}$

이므로

$\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-2}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+0}\frac{4}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+2}$

$=\frac{4}{4}=1$

$\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-2}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-0}\frac{0}{(x-2)(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+2)}$

$=0$

따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$는 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

09 $\lim_{x\to a}\frac{\log g(x)}{\log f(x)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{2\log\sqrt{g(x)}}{\log f(x)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{2\log\left\{f(x)\cdot\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}\right\}}{\log f(x)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{2\left\{\log f(x)+\log\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}\right\}}{\log f(x)}$

$=\lim_{x\to a}2\left\{1+\frac{\log\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}}{\log f(x)}\right\}=2$

답 2

10 $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=0$

$\therefore 1+a+b=0$

$b=-a-1$을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$(\text{좌변})=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-a-1}{(x-1)^2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{(x-1)^2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+a+1}{x-1}$

이때, $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+x+a+1)=0$

$3+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

$b=-a-1$에서 $\quad b=2$

$(\text{좌변})=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$

$\therefore c=3$

답 ①

11 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{ax^2+bx+c}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2$

$\lim_{x\to -1}(x^2-2x+1)=4,\ \lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)=1$

이므로

$\lim_{x\to -1}|f(x)|=\infty,\ \lim_{x\to 2}|f(x)|=\infty$

이려면

$\lim_{x\to -1}(2x^2+bx+c)=0,$

$\lim_{x\to 2}(2x^2+bx+c)=0$

이어야 한다.

$\begin{cases}2-b+c=0 & \cdots\cdots ㉠\\ 8+2b+c=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-2,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=2-2-4=-4$

답 ④

12 $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+x}<f(x)<\dfrac{4x-2}{2x+3}$에서

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+x}\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x-2}{2x+3}$

그런데

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=2,$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x-2}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{2}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\dfrac{4}{2}=2$

이므로 $2\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le2$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

답 2

▶ 2. 함수의 연속 / P_44

01 ①, ⑤ $f(a)$가 정의되어 있지만, $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지만, $f(a)$가 정의되어 있지 않다.

③ $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하고, $f(a)$가 정의되어 있지만 $\lim_{x\to a}f(x)\ne f(a)$이므로 $x=a$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않고, $f(a)$도 정의 되어 있지 않다.

답 ③

02 $f(1)=-2\cdot1+4=2$

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(-2x+4)=2$

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(x+1)=2$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

답 연속

03 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^3+ax+1}{x-1}=f(1)=b$ ……㉠

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^3+ax+1)=1+a+1=0$

$\therefore a=-2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+x-1)$

$=1=b$

$\therefore a+b=-2+1=-1$

답 -1

04 주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 모든 실수에서 연속이다.

$f(1)=a+5$

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(ax+5)=a+5$

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(x+2)=3$

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$a+5=3$

$\therefore a=-2$

답 -2

05 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$

$-a+1=3+b$

$\therefore a+b=-2$ ……㉠

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$에서

$2a+1=b$

$\therefore 2a-b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-1$

$\therefore ab=1$

답 1

06 정수 n에 대하여

(i) $n \le x < n+1$일 때

$[x]=n$이므로

$f(x)=n^2-(ax+b)n$

(ii) $n-1 \le x < n$일 때

$[x]=n-1$이므로

$f(x)=(n-1)^2-(ax+b)(n-1)$

$f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x \to n+0} f(x) = \lim_{x \to n-0} f(x) = f(n)$

$n^2-(an+b)n=(n-1)^2-(an+b)(n-1)$

$(a-2)n+b+1=0$ ······㉠

㉠이 n에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=-1$

답 $a=2,\ b=-1$

07 (i) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{(x^2-1)\sin ax}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^{n-2}}-\dfrac{1}{x^n}}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때, $f(x)=\sin ax$

(iii) $x=1$일 때, $f(1)=1$

(iv) $x=-1$일 때, $f(-1)=-1$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ \sin ax & (|x|<1) \\ 1 & (x=1) \\ -1 & (x=-1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\sin a=1$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\sin(-a)=-1$

$\therefore \sin a=1$ ······㉠

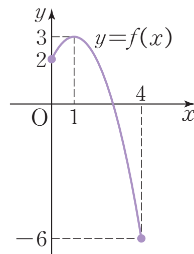
따라서 ㉠을 만족하는 양수 a의 최솟값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

답 $\frac{\pi}{2}$

08 $f(x)=-x^2+2x+2$

$=-(x-1)^2+3$

이므로 구간 $[0,\ 4]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



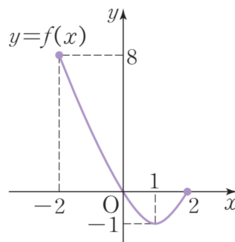
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 3, $x=4$일 때 최솟값 -6을 가진다.

따라서 구하는 합은 $3+(-6)=-3$

답 -3

09 (1) $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 8, $x=1$일 때 최솟값 -1을 가진다.

(2) 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\lim_{x \to 1+0} f(x)=\infty$

$\lim_{x \to 1-0} f(x)=-\infty$

이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 8, 최솟값: -1

(2) 최댓값, 최솟값은 없다.

10 $f(x)=\log x+x-2$로 놓으면
$f(1)=\log 1+1-2=-1<0$
$f(2)=\log 2+2-2=\log 2>0$
$f(3)=\log 3+3-2=\log 3+1>0$
$f(4)=\log 4+4-2=\log 4+2>0$
$f(5)=\log 5+5-2=\log 5+3>0$
$f(6)=\log 6+6-2=\log 6+4>0$
이므로
$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)>0$, $f(3)f(4)>0$,
$f(4)f(5)>0$, $f(5)f(6)>0$
따라서 중간값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 적어도 하나 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

답 ①

11 $f(0)f(1)=(-2)\cdot(-5)=10>0$
$f(1)f(2)=(-5)\cdot 3=-15<0$
$f(2)f(3)=3\cdot(-1)=-3<0$
$f(3)f(4)=(-1)\cdot 2=-2<0$
$f(4)f(5)=2\cdot 3=6>0$
이므로 구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다.
그러나 구간 $(0,\ 1)$, $(4,\ 5)$에서는 실근이 적어도 하나 존재한다고 말할 수 없다.

답 ①, ⑤

12 ㄱ. $f(x)=x^3-9x+16$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 연속이다.
$f(0)=16$
$f(1)=8$
$f(0)f(1)=16\cdot 8=128>0$
그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

ㄴ. $f(x)=x^4+x^2+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 연속이다.
$f(0)=1$
$f(1)=3$
$f(0)f(1)=1\cdot 3=3>0$
그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

ㄷ. $f(x)=3^x-4x$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 연속이다.
$f(0)=1$
$f(1)=-1$
$\therefore f(0)f(1)=1\cdot(-1)=-1<0$
그러므로 방정식 $f(x)=0$은 중간값의 정리에 의하여 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

따라서 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄷ이다.

답 ㄷ

13 구간 $(1,\ 2)$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 단 한 개의 교점을 갖는다는 것은 구간 $(1,\ 2)$에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖는다는 의미이다.
$F(x)=f(x)-g(x)=\log_2 x+(a-2)x+4$
로 놓으면 $y=\log_2 x$는 $x>0$에서 연속이고, 다항함수는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 함수 $F(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이다.
$F(1)F(2)<0$이면 중간값의 정리에 의하여 구간 $(1,\ 2)$에서 방정식 $F(x)$는 적어도 하나의 실근을 가진다.
$F(1)=\log_2 1+a-2+4$
$=a+2$
$F(2)=\log_2 2+2(a-2)+4$
$=2a+1$
이므로
$F(1)F(2)=(a+2)(2a+1)<0$
$\therefore -2<a<-\frac{1}{2}$

답 ②

대단원 평가 문제 p.48~51

01 $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$B=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}$

$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1$

$\therefore C>B>A$

답 ④

02 $\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}+\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}$

$=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to-0}\frac{x}{-x}$

$=1+(-1)=0$

답 ③

03 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ……㉠

㉠을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=a+2$

이므로 $a+2=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=-2$

$\therefore ab=-2$

답 ②

04 $\lim_{x\to 1}(\log|x^2-1|-\log|x^2+2x-3|)$

$=\lim_{x\to 1}\log\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}\right|$

$=\lim_{x\to 1}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|=\log\frac{1}{2}=-\log 2$

답 ①

05 $f(x)=x^3-x^2-x-1$로 놓으면

$f(0)=-1<0$

$f(1)=1-1-1-1=-2<0$

$f(2)=8-4-2-1=1>0$

$f(3)=27-9-3-1=14>0$

$f(4)=64-16-4-1=43>0$

$f(5)=125-25-5-1=94>0$

이므로

$f(0)f(1)>0,\ f(1)f(2)<0,\ f(2)f(3)>0,$

$f(3)f(4)>0,\ f(4)f(5)>0$

따라서 중간값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 적어도 하나 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

답 ②

06 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이다.

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{-t+\sqrt{t^2+4t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t^2+4t-t^2}{\sqrt{t^2+4t}+t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t}+t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}}$

$=\sqrt{\frac{4}{1+1}}=\sqrt{2}$

답 ④

07 $\sqrt{x}-2=t$로 놓으면 $x\to 4$이면 $t\to 0$이다.

$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{f(\sqrt{x}-2)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{(t+2)^4-16}{f(t)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{(t+2-2)(t+2+2)\{(t+2)^2+4\}}{f(t)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(t)}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}(t+4)\{(t+2)^2+4\}$

$=\frac{1}{4}\cdot 4(4+4)=8$

답 ④

08 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}-(ax+b)\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(a-b+1)x+b+1}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x+(a-b+1)+\dfrac{b+1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=0$

$1-a=0,\ a-b+1=0$에서

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ a+b=1+2=3$

답 ③

09 $2x-1<f(x)<2x+1$의 각 변을 세제곱하면

$(2x-1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+1)^3$ ⋯⋯㉠

$x\to\infty$이면 $4x^3+x^2-1>0$이므로 ㉠의 각 변을 $4x^3+x^2-1$로 나누면

$\dfrac{(2x-1)^3}{4x^3+x^2-1}<\dfrac{\{f(x)\}^3}{4x^3+x^2-1}<\dfrac{(2x+1)^3}{4x^3+x^2-1}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^3}{4x^3+x^2-1}\le\lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^3}{4x^3+x^2-1}$

$\le\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3}{4x^3+x^2-1}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^3}{4x^3+x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{8}{4}=2$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3}{4x^3+x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{8}{4}=2$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^3}{4x^3+x^2-1}=2$

답 ②

10 (분모)$=x^2-2x+1=(x-1)^2$

이고 $\lim_{x\to1}(x-1)^2=0$이므로 분자는 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어져야 한다.

1	1	a	b	c
		1	$a+1$	$a+b+1$
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1=0$
		1	$a+2$	
	1	$a+2$	$2a+b+3=0$	

$x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^2(x+a+2)$ ⋯㉠

$\therefore\ \lim_{x\to1}\dfrac{x^3+ax^3+bx+c}{x^2-2x+1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+a+2)}{(x-1)^2}$

$=1+a+2=2$

$\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^3-x^2+bx+c=(x-1)^2(x-1+2)$

$=(x-1)^2(x+1)$

$=(x^2-2x+1)(x+1)$

$=x^3-x^2-x+1$

$\therefore\ b=-1,\ c=1$

답 ③

11 조건 Ⅰ의 주어진 식에서 분모, 분자는 2차항의 계수가 같은 2차식이어야 한다.

$f(x)-2x^3=x^2+bx+c$로 놓고 조건 Ⅱ에 대입하면

$\lim_{x\to0}\dfrac{2x^3+x^2+bx+c}{x}=-3$

$\lim_{x\to0}x=0$이므로

$\lim_{x\to0}(2x^3+x^2+bx+c)=0$ $\therefore\ c=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\dfrac{2x^3+x^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+x+b)$

$=b=-3$

$\therefore\ f(x)=2x^3+x^2-3x$

답 ③

12 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(x^3+ax^2+bx)=0$

$9+3a+b=0$ $\therefore\ b=-3a-9$

$\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{x^3+ax^2-(3a+9)x}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(x+a+3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}x(x+a+3)$

$=3(a+6)$

$\therefore\ k=3(a+6)$

답 ⑤

13 ① $\lim_{x \to 2+0} f(x)=2$

$\lim_{x \to 2-0} f(x)=2$

따라서 $\lim_{x \to 2+0} f(x)=\lim_{x \to 2-0} f(x)$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=2$ (참)

② $\lim_{x \to 1+0} f(x)=1$

$\lim_{x \to 1-0} f(x)=0$

따라서 $\lim_{x \to 1+0} f(x) \neq \lim_{x \to 1-0} f(x)$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (참)

③ 불연속이 되는 x의 값은 1, 2, 4의 3개이다. (참)

④ 구간 $[1, 2]$에서 $x=2$일 때, 최댓값 3을 가진다. (참)

⑤ 구간 $[3, 4]$에서 $x=3$일 때, 최솟값 1을 가진다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

14 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x \to 0} \frac{|x+1|-1}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}=1$$

답 ③

15 ㄱ. $g(f(0))=g(1)=0$

ㄴ. $x \to 0$일 때, $f(x) \to 1$이므로 $t=f(x)$로 놓으면

$\lim_{x \to 0} g(f(x))=\lim_{t \to 1} g(t)=0$

$\therefore \lim_{x \to 0} g(f(x))=0$

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여

$g(f(0))=\lim_{x \to 0} g(f(x))$

이므로

함수 $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두이다.

답 ⑤

16 $x \neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x \to 1} (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)=3 \cdot 2=6$$

답 ③

17 (i) $|x|>1$일 때

$$f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{x}{0+1}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때

$$f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{0}{1+0}=0$$

(iii) $x=1$일 때

$$f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iv) $x=-1$일 때

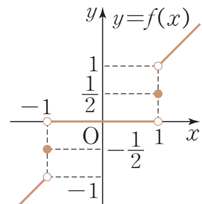
$$f(x)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ 0 & (|x|<1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ -\frac{1}{2} & (x=-1) \end{cases}$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

따라서 불연속인 점의 개수는 2개이다.



답 ②

18 $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}=a$에서 $\lim_{x \to 1} (x-1)=0$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)=0$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=b$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+1)g(x)$

($g(x)$는 다항함수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)g(x)$$
$$=2g(1)=a$$

$\therefore g(1)=\frac{a}{2}>0$ ($\because a>0$) ……㉠

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)g(x)$$
$$=-2g(-1)=b$$

$\therefore g(-1)=-\frac{b}{2}<0$ ($\because b>0$) ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(1)g(-1)<0$

그러므로 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 가진다.

답 ③

19 **1단계** $f(x)$의 차수를 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$에서 극한값이 0이 아닌 값이므로 분자, 분모는 차수가 같아야 한다.

따라서 $f(x)$는 이차식이다.

2단계 $f(x)$를 구한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=a=2$$

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+bx+c}{x^2-1}=1$에서

$\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(2x^2+bx+c)=0$

$2+b+c=0$ $\therefore c=-b-2$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+bx-b-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+2+b)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+2+b}{x+1}$$
$$=\frac{4+b}{2}=1$$

$\therefore b=-2,\ c=0$

답 $f(x)=2x^2-2x$

20 **1단계** 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $|x|>1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^{n-2}}+\frac{a}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x+a}{x^{n-1}+1}=2x+a$$

(iii) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{1+2+a}{1+1}=\frac{a+3}{2}$$

(iv) $x=-1$일 때

$f(x)$는 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ 2x+a & (|x|<1) \\ \frac{a+3}{2} & (x=1) \end{cases}$$

2단계 a의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$

$1=2+a=\frac{a+3}{2}$ $\therefore a=-1$

답 -1

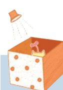
Ⅱ 다항함수의 미분법

1 미분계수와 도함수　　2 도함수의 활용



도함수를 이용하면 강물의 흐름, 행성의 운동, 미생물과 동식물의 개체 수의 증감과 같은 변화를 예측하거나 기업이 최소의 비용으로 최대의 이익을 얻기 위한 조건을 구할 수 있다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

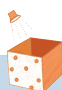
▶ 고등학교 수학
- 직선의 방정식

▶ 미적분과 통계 기본
- 함수의 극한과 연속성



이번에 배울 내용

- 평균변화율과 미분계수
- 미분가능성과 연속성
- 도함수의 뜻과 미분법 공식
- 도함수의 활용



다음에 배울 내용

▶ 미적분과 통계 기본
- 다항함수의 적분법

이 단원의 학습 목표

1. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 안다.
2. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
3. 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
4. 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있다.
5. 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정하고 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
6. 도함수를 방정식과 부등식, 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.



단원을 시작하기 전에 …

직선의 방정식

1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선

(2) 두 점 $(2,\ 3)$, $(-3,\ 6)$을 지나는 직선

함수의 극한

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (2) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

함수의 연속성

3 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & (x \neq 3) \\ 5 & (x=3) \end{cases}$$

접선의 방정식

4 $y=x^2$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

이차함수의 최대, 최소

5 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2+2x+3 \quad (-1 \le x \le 2)$

(2) $y=-x^2+3 \quad (1 \le x \le 3)$

단원을 시작하기 전에 ………… 풀이

1 (1) $y-3=2(x+1)$

$\therefore \boldsymbol{y=2x+5}$

(2) $y-3=\frac{3-6}{2+3}(x-2)$

$\therefore \boldsymbol{y=-\frac{3}{5}x+\frac{21}{5}}$

2 (1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2}(x+2) = \boldsymbol{4}$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2}{h}$

$= \lim_{h \to 0}(2x+h) = \boldsymbol{2x}$

3 $x \neq 3$일 때

$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3)=6 \neq 5=f(3)$

이므로 **함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이고 $x \neq 3$인 모든 실수에서 연속인 함수이다.**

4 기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+b$라고 하면 $2x+b=x^2$에서 $x^2-2x-b=0$의 판별식 D가 0이다. 즉

$\frac{D}{4}=1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore \boldsymbol{y=2x-1}$

5 (1) $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1은 구간 $-1 \le x \le 2$에 포함되므로 $f(-1)=2$, $f(2)=11$에서

최댓값: 11, 최솟값: 2

(2) $y=-x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 0은 구간 $1 \le x \le 3$에 포함되지 않으므로 $f(1)=2$, $f(3)=-6$에서

최댓값: 2, 최솟값: −6

1 미분계수와 도함수

이 단원을 배우면

- 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
- 미분계수의 기하학적 의미를 알 수 있다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해할 수 있다.
- 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.



1 미분계수
2 도함수의 정의와 미분법

소단원의 학습 목표

1. 평균변화율과 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
2. 미분계수의 기하학적 의미를 이해한다.
3. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

증분, Δx, Δy, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수

44

미분계수의 도함수

1 미분계수

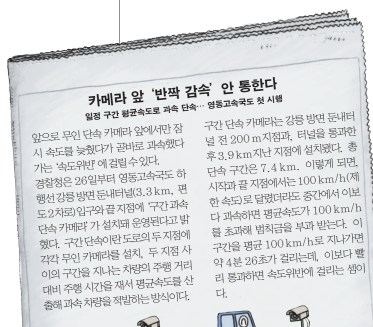
학습 목표

- 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
- 미분계수의 기하학적 의미를 이해한다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.



다 가 서 기 / 과속 단속 카메라





카메라 앞 '반짝 감속' 안 통한다

일정 구간 평균속도로 과속 단속… 영동고속국도 첫 시행

앞으로 무인 단속 카메라 앞에서만 잠시 속도를 늦췄다가 곧바로 과속했다가는 '속도위반'에 걸릴 수 있다.

경찰청은 26일부터 영동고속국도 하행선 강릉 방면 둔내터널(3.3 km, 편도 2차로) 입구와 끝 지점에 '구간 과속 단속 카메라'가 설치돼 운영된다고 밝혔다. 구간 단속이란 도로의 두 지점에 각각 무인 카메라를 설치, 두 지점 사이의 구간을 지나는 차량의 주행 거리 대비 주행 시간을 재서 평균속도를 산출해 과속 차량을 적발하는 방식이다.

구간 단속 카메라는 강릉 방면 둔내터널 전 200 m지점과, 터널을 통과한 후 3.9 km지난 지점에 설치됐다. 총 단속 구간은 7.4 km. 이렇게 되면, 시작과 끝 지점에서는 100 km/h(제한 속도)로 달렸더라도 중간에서 이보다 과속하면 평균속도가 100 km/h를 초과해 범칙금을 부과 받는다. 이 구간을 평균 100 km/h로 지나가면 약 4분 26초가 걸리는데, 이보다 빨리 통과하면 속도위반에 걸리는 셈이다.

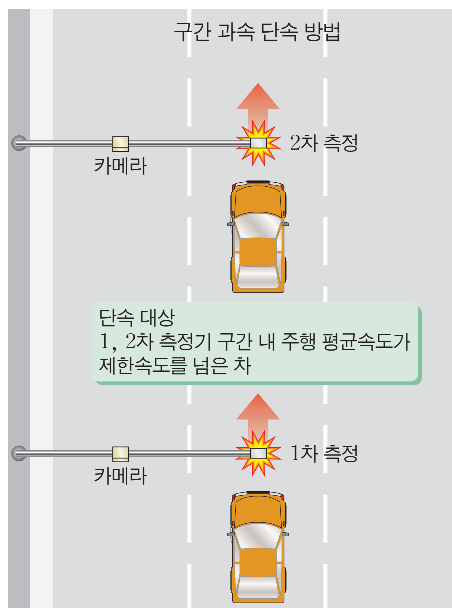
대부분의 무인 과속 단속 카메라는 자동차가 카메라 앞을 지나가는 순간의 속도를 측정하기 때문에 카메라 앞에서만 속도를 줄이는 일명 '캥거루식 과속'에는 속수무책이었다.

이에 경찰청은 특정 구간에서 평균속도를 측정하는 구간 과속 단속 시스템을 도입하였다. 이와 같이 과속 단속에도 수학적 개념이 활용된다.

다가서기 / 해설

교통사고 예방을 위해 운용되는 무인 과속 단속 카메라는 자동차가 카메라 앞을 지나가는 순간의 속도를 측정하기 때문에 규정 속도보다 빠르게 달리던 자동차가 카메라 앞에서만 속도를 줄이는 일명 '캥거루식 과속'에는 속수무책이었다. 이것을 방지하기 위해 2007년 12월 26일부터 영동고속국도 강릉 방면 둔내터널(편도 2차)의 7.4 km 구간에서 평균속도로 과속을 단속하는 시스템을 우리나라 최초로 도입하였다. 이 시스템은 도로의 두 지점에 각각 무인 카메라를 설치, 두 지점 사이의 구간을 지나는 차량의 주행 거리 대비 주행 시간을 재어 평균속도로 과속 차량을 적발한다.

아주 짧은 시간 동안 움직인 거리를 측정하여 속도를 계산하는 순간속도와 비교적 긴 시간 동안 움직인 거리를 측정하여 속도를 계산하는 평균속도는 각각 우리가 이 단원에서 배우게 될 순간변화율, 평균변화율과 그 의미가 같다.

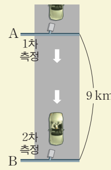


45

01 평균변화율

탐 구 하 기 / 평균속도

오른쪽 그림과 같이 두 지점 A, B에 각각 과속 단속 카메라가 설치되어 있는 도로가 있다. 두 지점 A, B 사이의 거리가 9 km이고, 어떤 차량이 A, B를 통과한 시각이 각각 13시 5분과 13시 10분이다. 이때, 두 지점 A, B 사이에서 이 차량의 평균속도가 시속 몇 km인지 구하여 보자.



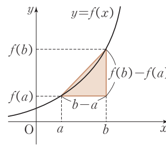
알 아 보 기 / 함수 $y=f(x)$에서 x값의 변화에 대한 함숫값 y의 변화를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값 y는 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

이때, x값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, 이에 대한 y값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, 기호로 각각

$$\Delta x,\ \Delta y$$

와 같이 나타낸다.



Δ는 영어 difference의 첫 글자인 D에 해당하는 그리스 문자이며 '델타(delta)'라고 읽는다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 P$(a, f(a))$, Q$(b, f(b))$를 잇는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다.

탐구하기 / 풀이

두 지점 A, B를 지나는 데 걸린 시간이 5분, 즉 $\frac{5}{60}$ 시간이고 두 지점 사이의 거리는 9 km이므로 두 지점 A, B 사이에서 이 차량의 평균속도는

$\dfrac{9}{\frac{5}{60}}$ km/h, 즉 **시속 108 km**이다.

| 다른 풀이 |

한 시간 동안 움직인 거리를 구하는 문제이므로 비례식을 이용하면 편리하다.

$5:9=60:x$

$5x=9\times60$

$\therefore x=\frac{9\times60}{5}=\mathbf{108\ (km/h)}$

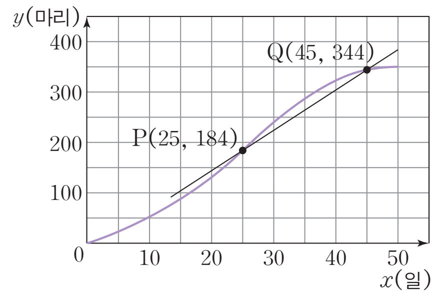
알아보기 / 해설

변하는 두 양 x와 y 사이의 평균변화율이란 한 양 x가 a에서 b까지 변할 때 다른 양 y가 평균적으로 얼마나 변하는지를 나타내는 비율을 말한다.



Plus 문제

아래의 그래프는 50일 동안 관찰한 초파리 수의 변화를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여라.



(1) 25일과 45일 사이에 초파리는 하루에 평균 몇 마리씩 증가했는지 구하여라.

(2) 곡선 위의 두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기는 어떤 의미를 가지는지 설명하여라.

| 풀이 |

(1) 25일의 초파리 수는 184마리이고, 45일의 초파리 수는 344마리이므로 20일 동안 160마리가 증가하였다.
따라서 25일과 45일 사이에 초파리는 하루에 평균적으로 $\frac{160}{20}=8$(마리)씩 증가하였다.

(2) P(25, 184), Q(45, 344)이므로 직선 PQ의 기울기는
$\frac{344-184}{45-25}=8$
따라서 두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기는 **25일과 45일 사이에 초파리가 하루에 평균적으로 증가한 수를 의미한다.**

함께하기 / 해설

x의 증분을 나타내는 Δx는

$x_2 > x_1$이면 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$x_2 < x_1$이면 $\Delta x = x_2 - x_1 < 0$

임에 유의해야 한다.

1 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

2 x의 값에 대한 평균변화율은 점프대에서 뛰어내린 사람의 특정 시각 사이의 평균속도를 의미한다.

이 예로부터 평균변화율이 자연과학이나 실생활에 사용됨을 알 수 있다.

46

함 께 하 기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 함수 $f(x)=x^2-3x$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) -2에서 3까지 (2) a에서 $a+\Delta x$까지

| 풀이 |

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{(3^2-3\cdot 3)-\{(-2)^2-3\cdot(-2)\}}{5} = -2$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\{(a+\Delta x)^2-3(a+\Delta x)\}-(a^2-3a)}{\Delta x}$

$= 2a-3+\Delta x$

2 높이가 123 m인 점프대에서 뛰어내린 사람의 x초 후의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+123$의 관계식이 성립한다. x의 값이 다음과 같이 변할 때, 높이의 평균변화율을 구하여라.

(1) 1에서 4까지 (2) a에서 $a+\Delta x$까지

시간이 변함에 따라 높이가 점점 낮아지므로 높이의 평균변화율은 음수값을 가진다.

| 풀이 |

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(-5\cdot 4^2+123)-(-5\cdot 1^2+123)}{3} = -25$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\{-5(a+\Delta x)^2+123\}-(-5a^2+123)}{\Delta x}$

$= -10a-5\Delta x$

스 스 로 하 기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 다음 함수에서 x의 값이 [ ] 안과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=-5x$ [1에서 3까지]

(2) $f(x)=x^3+5$ [a에서 $a+\Delta x$까지]

2 리듬 체조 선수가 던진 곤봉의 x초 후의 높이를 y m라고 하면, x와 y 사이에는 $y=-5x^2+10x+1.7$의 관계식이 성립한다. 곤봉을 던진 후 1초에서 2초까지 높이의 평균변화율을 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-15+5}{2} = \mathbf{-5}$

(2) $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$

$= \frac{(a+\Delta x)^3+5-(a^3+5)}{\Delta x}$

$= \frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$= \mathbf{3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2}$

2 $f(x)=-5x^2+10x+1.7$이라고 하면 곤봉을 던진 후 1초에서 2초까지 높이의 평균변화율은

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1.7-6.7 = \mathbf{-5}$



Plus 문제

1. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선에 대하여 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

2. x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 이차함수 $f(x)=px^2+qx+r$의 평균변화율을 구하여라.

(단, p, q, r는 상수)

| 풀이 |

1. $\frac{2-1}{2-1} = \mathbf{1}$

2. $\frac{(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)}{b-a}$

$= \frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}$

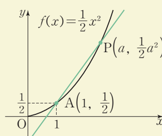
$= \mathbf{p(b+a)+q}$

02 미분계수

탐 구 하 기 / 운동 에너지

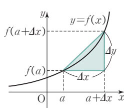
운동 에너지란 운동하는 물체가 가지는 에너지로, 물체의 질량을 m, 속도를 v라고 하면 물체의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$이다.

질량이 1 kg인 물체가 초속 x m로 운동할 때의 운동 에너지를 $f(x)$라고 하면 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 두 점 $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$을 지나는 직선의 기울기 $m(a)$를 구하여라. (단, $a\neq1$)
2. 극한값 $\lim_{x\to1} m(x)$를 구하여라.

알 아 보 기 / 미분계수에 대하여 알아보자.



함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

에서 Δx가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다.

이때, 위의 극한값 ㉠을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

미분계수 $f'(a)$는 'f prime a'라고 읽는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$f'(a)$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

탐구하기 / 풀이

1. 두 점 $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$을 지나는 직선의 기울기 $m(a)$는

$$m(a)=\frac{\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}}{a-1}=\frac{\frac{1}{2}(a^2-1)}{a-1}$$
$$=\frac{a^2-1}{2(a-1)}=\frac{(a-1)(a+1)}{2(a-1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{a+1}{2}}\ (\text{단}, a\neq1)$$

2. $$\lim_{x\to1}m(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}=\mathbf{1}$$

알아보기 / 해설

- 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

의 극한값

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.
이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

- $f'(a)$의 여러 가지 표현

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- 함수 $f(x)$가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하다는 정의는 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 속하는 임의의 a에 대하여 $f'(a)$가 존재한다는 것이다.
만일 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 a에 대하여 $f'(a)$가 존재하면, 즉 정의역의 모든 x의 값에서 $f(x)$가 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.
한편 다항함수 $f(x)$는 정의역이 실수 전체의 집합이며 임의의 실수 a에 대하여 $f'(a)$가 존재한다.
따라서 다항함수는 미분가능한 대표적인 함수로 이 단원에서는 다항함수를 미분하는 방법을 다룬다.

•함수 $f(x)$가 구간 $(c,\ d)$의 모든 x의 값에서 미분가능하면 $f(x)$는 구간 $(c,\ d)$에서 미분가능하다고 한다.
예를 들어 함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하면 $f'(1.2)$, $f'(1.5)$, $f'(2.6)$ 등이 존재한다.
하지만 4는 구간 $(1,\ 3)$에 포함되지 않으므로 $f'(4)$의 값은 존재하지 않을 수도 있다.

특히 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.
또 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

함께 하기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 함수 $f(x)$가 다음과 같을 때, $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$을 구하여라.
(1) $f(x)=2x-1$ (2) $f(x)=x^2$

풀이

(1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{2(1+\Delta x)-1\}-(2\cdot1-1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$
$=\mathbf{2}$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}(2+\Delta x)$
$=\mathbf{2}$

스스로 하기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 다음 함수의 [ ]안에 주어진 값에서의 미분계수를 구하여라.
(1) $f(x)=50$ $[x=1]$ (2) $f(x)=-5x+10$ $[x=-3]$
(3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ $[x=0]$ (4) $f(x)=x^3-1$ $[x=2]$

2 함수 $f(x)=x^3$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f'(1)$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{50-50}{\Delta x}$$
$$=\mathbf{0}$$

(2) $f'(-3)$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-3+\Delta x)-f(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-5(-3+\Delta x)+10\}-25}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-5\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\mathbf{-5}$$

(3) $f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{1}{2}\Delta x+1\right)$$
$$=\mathbf{1}$$

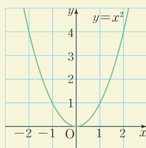
(4) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(2+\Delta x)^3-1\}-7}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{12\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\{12+6\Delta x+(\Delta x)^2\}=\mathbf{12}$$

2 $f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\{3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2\}=\mathbf{3a^2}$$

03 미분계수의 기하학적 의미

탐 구 하 기 / 이차함수의 접선

곡선 $y=x^2$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$과 원점 O에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



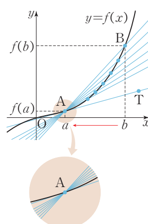
1. 세 직선 OA, OB, OC를 그려라.
2. 점 D의 좌표를 $\mathrm{D}(h,\ h^2)$이라고 하면 h의 값이 한없이 0에 가까워질 때, 직선 OD는 어떤 직선에 한없이 가까워지는지 말하여라.

알 아 보 기 / 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 알아보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에 대하여 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

는 직선 AB의 기울기를 뜻한다.



여기서 b가 a에 한없이 가까워지면 점 B는 곡선을 따라 점 A에 한없이 가까워진다.

역으로 점 B가 곡선을 따라 점 A에 한없이 가까워지면 b는 a에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

이때, 직선 AB는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워진다. 이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A는 접점이라고 한다.

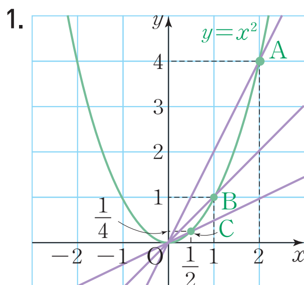
따라서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

탐구하기 / 풀이

1.



2. h의 값이 한없이 0에 가까워질 때, 직선 OD는 직선 $\boldsymbol{y=0(x}$**축)**에 한없이 가까워진다.

알아보기 / 해설

미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 이 접선이 x축과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 기울기는

$$\tan\theta=f'(a)$$

가 성립한다. $\left(\text{단, } \theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$



Plus 문제

1. 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $f'(1)$을 구하여라.
2. 함수 $f(x)=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $f'(1)$인 직선의 방정식을 구하여라.
3. 2에서 구한 직선과 곡선 $y=x^2$이 한 점에서 접함을 판별식을 이용하여 보여라.

| 풀이 |

1. $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1^2+2h+h^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=\mathbf{2}$$

2. $f'(1)=2$이므로 $y-1=2(x-1)$
   $\therefore\ \boldsymbol{y=2x-1}$

3. $y=2x-1$, $y=x^2$에서 $x^2=2x-1$
   $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라고 하면
   $$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$$
   이므로 직선 $y=2x-1$과 곡선 $y=x^2$은 한 점에서 접한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f'(1)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+x-2-(-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)}{x-1}=\mathbf{-1}$$

(2) $f'(0)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+x-2-(-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x(x-1)}{x}=\mathbf{1}$$

(3) $f'(-1)$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+x-2-(-4)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{-(x-2)(x+1)}{x+1}=\mathbf{3}$$

2 $f'(a)$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2+4x+1-(a^2+4a+1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+4)}{x-a}=2a+4$$

(1) $f'(a)=6$이면 $a=1$이므로 **P(1, 6)**

(2) $f'(a)=-2$이면 $a=-3$이므로 **P(−3, −2)**

50

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **미분계수와 접선의 기울기**
> 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

함 께 하 기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 곡선 $y=x^2-3x+5$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

풀이

$f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면 구하는 접선의 기울기, 즉 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$은 다음과 같다.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+5\}-(1^2-3\cdot1+5)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(-1+\Delta x)$$
$$=-1$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 곡선 $y=-x^2+x-2$에 대하여 다음 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(1) $(1,\ -2)$ (2) $(0,\ -2)$ (3) $(-1,\ -4)$

2 곡선 $y=x^2+4x+1$ 위의 점 $P(a,\ a^2+4a+1)$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$가 다음과 같을 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

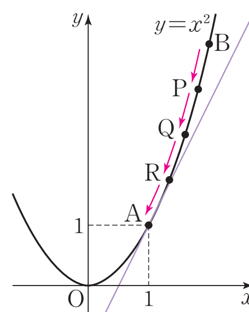
(1) $f'(a)=6$ (2) $f'(a)=-2$



Plus 문제

곡선 $y=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위에 있는 세 점 P, Q, R에 대하여 동점 B가 세 점 P, Q, R를 차례로 지나면서 점 A에 가까워질 때, 직선 AB는 어느 직선에 가까워지는가?



(2) 점 B의 좌표를 $B(1+h,\ (1+h)^2)$이라고 할 때, 직선 AB의 기울기를 구하여라.

(3) (2)에서 h가 0에 한없이 가까워질 때, 직선 AB의 기울기의 극한값을 구하여라.

(4) 점 $A(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 말하여라.

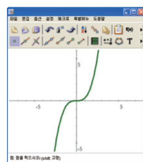
공 학 도 구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

기하 작도용 컴퓨터 프로그램을 이용한 실험 관찰

기하 작도용 컴퓨터 프로그램을 이용하여 직선의 기울기의 변화를 쉽게 관찰할 수 있다. 이 프로그램은 http://zirkel.sourceforge.net에서 내려받을 수 있다.

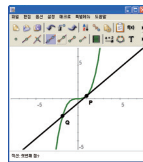
1단계 함수 아이콘 f(x)을 선택한 후 '이름'에 'f', 'y좌표를 나타내는 식'에 '1/3*x^3'을 입력하고, 녹색을 선택한 후 '확인'을 클릭하면 | 그림 1 |과 같은 그래프가 그려진다.



| 그림 1 |

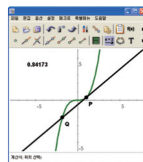
2단계 직선 아이콘 을 선택한 후 화면의 빈 곳과 곡선 위의 임의의 위치를 순서대로 클릭하면 두 점을 지나는 직선이 작도된다.

3단계 빈 곳에 작도된 점에 마우스 포인터를 올려놓은 후 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하면 점 편집 창이 열린다. 점 편집 창의 '이름'에 'P', 'x좌표'에 '1', 'y좌표'에 'f(1)'을 입력하고 개체의 이름 보이기 아이콘 을 선택한 후 '확인'을 클릭한다. 같은 방법으로 점 P가 아닌 곡선 위에 있는 점의 이름을 'Q'로 입력하면 | 그림 2 |와 같은 그래프가 그려진다.



| 그림 2 |

4단계 계산식 아이콘 을 선택한 후 화면의 빈 곳을 클릭하면 식 편집 창이 열린다. '설명'에 '직선 PQ의 기울기', '계산식'에 '(y(P)−y(Q))/(x(P)−x(Q))'를 입력하고 '확인'을 클릭하면 | 그림 3 |과 같이 직선 PQ의 기울기가 화면에 나타난다.



| 그림 3 |

5단계 마우스를 이용하여 점 Q를 이동해 본다.

이와 같이 점 Q를 점 P를 향하여 가까이 움직이며 직선 PQ의 기울기의 변화를 관찰할 수 있다.

| 풀이 |

(1) 점 B가 세 점 P, Q, R를 차례로 지나면 직선 AB는 직선 AP, 직선 AQ, 직선 AR로 변하면서 **점 A에서 곡선에 접하는 직선**에 가까워진다.

(2) $A(1,\ 1)$, $B(1+h,\ (1+h)^2)$이므로

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1}=\frac{2h+h^2}{h}=\mathbf{2+h}$$

(3) $\lim_{h\to 0}(2+h)=\mathbf{2}$

(4) h가 0에 한없이 가까워지면 점 B는 세 점 P, Q, R를 차례로 지나면서 점 A에 가까워지므로 직선 AB는 점 A에서의 접선에 가까워진다.

따라서 접선의 기울기는 직선 AB의 기울기의 극한값 **2**와 같다.

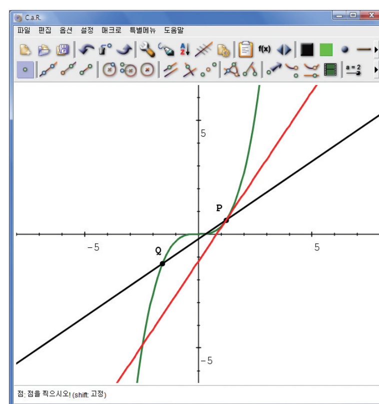
공학 도구 / 해설

• 기하 작도용 컴퓨터 프로그램 C. a. R.는 독일의 R. Grothmann 교수가 개발한 것으로 무료로 내려받아 사용할 수 있는 프로그램이다.

• 이 프로그램을 이용하면 곡선 위의 점 P에서의 접선의 그래프를 그릴 수 있고, 점 Q가 점 P에 한없이 다가갈 때, 직선 PQ가 점 P에서의 접선에 한없이 다가감을 관찰할 수 있다.

6단계

함수 아이콘 f(x)을 선택한 후 'y좌표를 나타내는 식'에 'diff(f, x(P))*(x−x(P))+y(P)'를 입력하고, 붉은색을 선택한 후 '확인'을 클릭하면 다음 그림과 같이 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선이 붉은색으로 나타난다.



이때, 점 Q를 점 P를 향해 움직여 보면 직선 PQ가 점점 붉은색 직선에 가까워짐을 확인할 수 있다.

C. a. R. 외에도 기하 작도용 컴퓨터 프로그램인 geogebra를 이용하여 그릴 수도 있다. 이 프로그램은 http://www.geogebra.org에서 무료로 내려받아 사용할 수 있다.

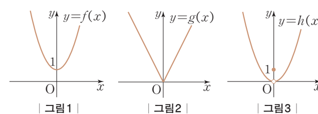
알아보기 / 해설

- 미분가능성과 연속성의 관계는
  (ⅰ) 연속이고 미분가능한 함수
  (ⅱ) 연속이지만 미분가능하지 않은 함수
  (ⅲ) 불연속이고 미분가능하지 않은 함수
  의 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
- 불연속이면 미분가능하지 않지만, 연속이면 다시 미분가능한 경우와 미분가능하지 않은 경우로 나뉘어짐에 유의해야 한다. 즉, 함수 $g(x)=2|x|$와 같이 연속이지만 미분가능하지 않은 함수가 존재함에 유의해야 한다.
  역으로 미분가능한 함수는 항상 연속임을 알 수 있다.

04 미분가능성과 연속성

알 아 보 기 / 미분가능성과 연속성의 관계를 알아보자.

세 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2|x|$, $h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



| 그림1 | | 그림2 | | 그림3 |

| 그림1 | 의 함수 $f(x)=x^2+1$은 $x=0$에서 연속이다. 또

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

| 그림2 | 의 함수 $g(x)=2|x|$는 $x=0$에서 연속이다. 그러나

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=-2\neq 2=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}$$

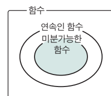
이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

또한 | 그림3 | 의 함수 $h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$은 $x=0$에서 불연속이다. 또

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(0+\Delta x)-h(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^2-1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2-1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x-\frac{1}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

일반적으로 함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계는 다음과 같다.



미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

| **참고** | 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 $f'(a)$는 존재하지 않는다.

참고 | 실생활 속의 미분

1. 물가와 주행 거리를 비교한다면 물가 상승률은 속도에 대응하고, 상승률의 변화는 가속도에 대응한다. 따라서 물가 상승률과 상승률의 변화는 미분으로 구할 수 있다.
   한편, 물가 상승률의 변화율이 마이너스일지라도 물가는 오를 수 있다. 물가 상승률의 변화율이 마이너스라는 것은 물가가 상승되는 비율의 변화율이 마이너스란 뜻이기 때문이다.

2. 화석의 연대 측정
   방사성 물질이 붕괴되어 줄어드는 속도는 미분으로 구할 수 있다. 한편 방사성 물질의 붕괴 속도, 즉 미분을 포함하고 있는 식으로부터 그 식을 만족하는 함수를 찾는 것이 미분방정식을 푸는 것이며, 이 식은 화석의 연대 측정에 사용되고 있다.

3. 핼리의 예측
   핼리는 뉴턴의 만유인력의 법칙과 미적분을 이용하여 핼리혜성의 궤도 계산에 성공하였으며, 그 결과 이 혜성이 언제 나타날 것인지를 예측하였다.

4. 인공위성의 속도
   지구 주위를 타원 궤도로 운동하고 있는 인공위성은 그 운동에 의한 원심력과 지구의 중력이 균형을 이루고 있으므로 반영구적으로 돌고 있다. 이와 같은 인공위성의 속도는 미적분을 이용하여 측정할 수 있다.

53

함께하기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 함수 $f(x)=x-|x|$에 대하여 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

풀이

$\lim_{x\to+0}(x-|x|)=\lim_{x\to-0}(x-|x|)=0$이고, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)=x-|x|$는 **$x=0$에서 연속이다.**

한편

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\{(0+\Delta x)-|0+\Delta x|\}-(0-|0|)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x-|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{0}{\Delta x}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\Delta x\to+0$이면 $\Delta x>0$이므로 $|\Delta x|=\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\{(0+\Delta x)-|0+\Delta x|\}-(0-|0|)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x-|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\Delta x\to-0$이면 $\Delta x<0$이므로 $|\Delta x|=-\Delta x$

㉠, ㉡에서 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=x-|x|$는 **$x=0$에서 미분가능하지 않다.**

스스로 하기 / 익힘책 37쪽 | 익힘책 38쪽 | 익힘책 39쪽

1 함수 $f(x)=2|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

2 오른쪽 표는 2006년 11월 1일부터 적용된 규격 우편 요금을 나타낸 것이다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

중량	규격 우편 요금
5 g 이하	220원
5 g 초과 25 g 이하	250원
25 g 초과 50 g 이하	270원

(1) 중량을 x g, 우편 요금을 y원이라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내어라. (단, $0<x\le50$)

(2) 불연속인 점의 x의 값을 모두 구하여라.

(3) 미분가능하지 않은 점의 x의 값을 모두 구하여라.

함께하기 / 해설

1 '미분가능하면 연속이다.'의 역인 '연속이면 미분가능하다.'가 거짓임을 보여 주는 반례이다.

(i) $x\ge0$일 때

$f(x)=x-|x|=x-x=0$

(ii) $x<0$일 때

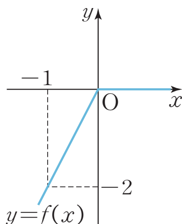
$f(x)=x-|x|$

$=x-(-x)=2x$

(i), (ii)에 의하여

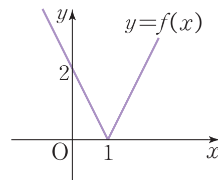
$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



스스로 하기 / 풀이

1 함수 $f(x)=2|x-1|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x\to1+0}2|x-1|=\lim_{x\to1-0}2|x-1|=0$$

또 $f(1)=0$이므로 함수 $f(x)=2|x-1|$은 $x=1$에서 연속이다. 한편

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{2|(1+\Delta x)-1|-2|1-1|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{2|\Delta x|}{\Delta x}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{2|(1+\Delta x)-1|-2|1-1|}{\Delta x}$$

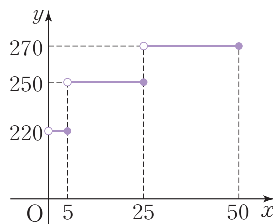
$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{2|\Delta x|}{\Delta x}=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $f'(1)$은 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)=2|x-1|$은 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

2 (1) 주어진 표에서 x와 y 사이의 관계식은

$$y=\begin{cases}270 & (25<x\le50)\\ 250 & (5<x\le25)\\ 220 & (0<x\le5)\end{cases}$$

이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) **5, 25** (3) **5, 25**

소단원의 학습 목표

1. 도함수의 정의를 알고, 정의에 따라 도함수를 구할 수 있다.
2. 상수함수와 함수 $y=x^n$(n은 자연수)의 도함수를 구할 수 있다.
3. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법의 공식을 유도하고, 이를 활용할 수 있다.
4. 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

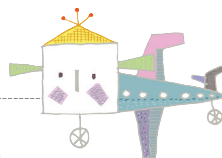
여기서 배우는 용어 및 기호

도함수, $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$

54

1 미분계수와 도함수

2 도함수의 정의와 미분법



학습 목표
- 도함수의 뜻을 이해한다.
- 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

다 가 서 기 / **최대 이익과 미분**

PMP(portable multi-media player)란 음악 및 동영상 재생, 디지털 카메라 기능 등을 갖춘 휴대용 멀티미디어 재생 장치이다.



기업의 목표는 최소의 비용으로 최대의 이익을 내는 데 있다. 어떤 상품에 대한 수입과 비용의 함수가 주어지면 그것에 따른 이윤의 함수가 정해지며, 기업은 이것을 이용하여 최대 이익을 낼 수 있는 가격과 생산량을 정하게 되는 것이다.

이와 같이 수요, 공급, 이익이 상호 작용하며 증가·감소하는 경제 문제를 이해하는 데에도 도함수가 이용된다.

다가서기 / 해설

세상의 모든 것은 변하고 있다. 예를 들면 모양, 위치, 온도 등은 시간에 따라 바뀐다. 뉴턴은 점이 움직여서 선이 만들어지고, 선이 움직여서 면이 만들어진다고 생각하였고, 모든 것을 변화의 관점에서 사고하였다. 이와 같이 변하는 것들에 대하여 변화의 양상을 설명하고자 발달된 것이 미분이다.
한편 곡선은 극히 작은 부분만 보면 직선이고, 곡면도 작은 부분만 보면 평면이 된다. 극히 작은 부분에 관심을 가지는 것이 미분적 사고이며, 미분에서는 미분적 사고를 필요로 한다.
실생활에서도 미분적 사고가 대단히 중요한 역할을 한다. 기업 활동에서 최대의 이익을 창출하기 위해 적정한 가격과 생산량을 결정하는 데에도 도함수가 유용하게 사용된다.
인간의 일생을 통하여 이루어 놓은 업적도 대부분은 인생의 어느 순간에 이루어진 업적들이 쌓여진 것이므로 하루하루 또는 순간순간을 어떻게 지내느냐가 매우 중요하다.

참고 | 뉴턴의 미분법

움직이는 점 P의 위치 x와 시각 t 사이에 $x=t^3$의 관계식이 성립할 때, 점 P의 속도를 구하기 위해 뉴턴은 다음과 같은 방법을 사용하였다.
아주 작은 증가량을 ε을 써서 나타내면 시각 t가 t_0에서 $t_0+\varepsilon$이 될 때, 점 P의 위치 x는 $t_0^{\,3}$에서
$(t_0+\varepsilon)^3=t_0^{\,3}+3\cdot t_0^{\,2}\cdot\varepsilon+3\cdot t_0\cdot\varepsilon^2+\varepsilon^3$
이 된다. 여기서 t가 ε만큼 증가할 때, 움직인 거리는 $3\cdot t_0^{\,2}\cdot\varepsilon+3\cdot t_0\cdot\varepsilon^2+\varepsilon^3$이므로 움직인 거리와 증가한 양의 비는 다음과 같다.
$3\cdot t_0^{\,2}\cdot\varepsilon+3\cdot t_0\cdot\varepsilon^2+\varepsilon^3 : \varepsilon=3\cdot t_0^{\,2}+3\cdot t_0\cdot\varepsilon+\varepsilon^2 : 1$
ε은 한없이 작다고 생각하여 ε이 곱해진 항을 없애면 $3t_0^{\,2} : 1$이므로 점 P의 시간 t_0에서의 속도는 $3t_0^{\,2}$이다.

01 도함수의 뜻

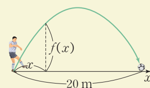
탐구하기 / 축구공의 자취



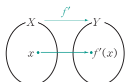
어떤 사람이 찬 공이 날아간 수평 거리를 x m라 하고 바닥에서 공까지의 높이를 $f(x)$ m라고 하면

$f(x)=-x^2+20x\ (0\le x\le 20)$

의 관계식이 성립한다. 이때, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 구하여라. (단, $0<a<20$)



알아보기 / 도함수의 뜻을 알아보자.



함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수 a에 대하여 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

이제 임의의 실수 a에 미분계수 $f'(a)=2a$를 대응시키는 새로운 함수를 생각할 수 있다.

이와 같이 미분가능한 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 얻는다.

이때, 이 함수 $f'(x)$를 $f(x)$의 **도함수**라 하고, 기호로

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

도함수를 영어로 derived function 또는 derivative라고 한다.

기호 $\frac{dy}{dx}$는 '디와이 디엑스($dy\ dx$)'라고 읽는다.

미분을 영어로 differential 또는 differentiation이라고 한다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **함수 $y=f(x)$의 도함수**
>
> $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

탐구하기 / 풀이

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{-x^2+20x-(-a^2+20a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(-x-a+20)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}(-x-a+20)\\&=\mathbf{-2a+20}\end{aligned}$$

이때, a를 변수로 생각하면 $f'(a)$는 임의의 점에서의 미분계수를 구할 수 있는 함수가 된다.

알아보기 / 해설

- 도함수의 정의는 다음과 같이 여러 가지 형태로 나타낼 수 있다.

  (1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  (2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

  (3) $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

  도함수를 구할 때는 보통 (2)를 많이 사용하지만 문제 상황에 따라 적절하게 이용하도록 한다.

- 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 도함수의 정의

  $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

  를 이용하여 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

  그러나 함수가 복잡할 때는 도함수의 정의에서 극한을 계산하는 일은 번거롭기 때문에 다음에 배우는 미분법의 공식을 이용하여 함수를 미분한다.

  한편 미분법의 공식을 이용하여 미분하는 것에 익숙해지면 도함수의 정의를 잊기 쉬우나 도함수의 정의를 활용하여 해결하는 문제들이 많으므로 잘 숙지해 두어야 한다.

참고 | 미분계수의 여러 가지 표현

미분계수 $f'(a)$는

$$y'|_{x=a},\quad y'_{x=a},\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

로 나타내기도 한다.

함께하기 / 해설

1 $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$임을 이용하여 풀 수도 있다.

(1) $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{3-3}{t-x}=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)$

$$=\lim_{t\to x}\frac{(3t+2)-(3x+2)}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{3(t-x)}{t-x}=\mathbf{3}$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\boldsymbol{f'(x)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1-(-1)}{\Delta x}=\mathbf{0}$$

(2) $\boldsymbol{f'(x)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\mathbf{0}$$

(3) $\boldsymbol{f'(x)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)+1\}-(2x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=\mathbf{2}$$

(4) $\boldsymbol{f'(x)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)-ax}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=\boldsymbol{a}$$

56

함 께 하 기 / 익힘책 43쪽 | 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽

1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=3$ (2) $f(x)=3x+2$

풀이

(1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3-3}{\Delta x}=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{3(x+\Delta x)+2\}-(3x+2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=\mathbf{3}$

직선 $f(x)=c$ (c는 상수) 위의 임의의 점에서 접선의 기울기는 항상 0이다.

2 함수 $f(x)=x^2+x+1$을 미분하여라.

풀이

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)+1\}-(x^2+x+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+1)=\mathbf{2x+1}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 43쪽 | 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽

1 다음 함수의 도함수를 구하여라. (단, a, c는 상수)

(1) $f(x)=-1$ (2) $f(x)=c$

(3) $f(x)=2x+1$ (4) $f(x)=ax$

2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=(x-2)^2+1$ (2) $f(x)=x^3$

2 (1) $\boldsymbol{f'(x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x-2)^2+1\}-\{(x-2)^2+1\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x-4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x-4+\Delta x)=\mathbf{2x-4}$$

(2) $\boldsymbol{f'(x)}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x\cdot x^2+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{3x^2+3\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2\}=\mathbf{3x^2}$$

57

02 미분법의 공식(1)

알 아 보 기 / 함수의 도함수를 쉽게 구할 수 있는 공식을 유도하여 보자.

a^n-b^n
$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots$
$+ab^{n-2}+b^{n-1})$

자연수 r $(1\le r\le n)$에 대하여
$\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^{n-r}x^{r-1}$
$=x^{n-r}x^{r-1}$
$=x^{n-1}$

함수 $f(x)=x^n$ (n은 자연수)의 도함수를 구하여 보자.

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$
$=(x+\Delta x)^n-x^n$
$=\Delta x\{(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}\}$

$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\cdots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}\}$
$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}$
$=nx^{n-1}$

또 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f(x)=x^n$과 상수함수의 도함수
(1) $f(x)=x^n$ (n은 자연수)이면 $f'(x)=nx^{n-1}$
(2) $f(x)=c$ (c는 상수)이면 $f'(x)=0$

| **보기** | (1) $f(x)=x^{10}$의 도함수는 $f'(x)=10x^{10-1}=10x^9$
(2) $f(x)=7$의 도함수는 $f'(x)=0$

스 스 로 하 기 / 익힘책 43쪽 | 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽

1 다음 함수의 도함수를 구하여라.
(1) $f(x)=\frac{\pi}{2}$ (2) $f(x)=x$
(3) $f(x)=x^5$ (4) $f(x)=x^{2009}$

알아보기 / 해설

n이 자연수일 때,

$(x^n)'=nx^{n-1}$ ······ ㉠

임을 수학적 귀납법을 이용하여 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=(x)'=1$

(우변)$=1\cdot x^{1-1}=x^0=1$

따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(x^k)'=kx^{k-1}$

$n=k+1$일 때,

$(x^{k+1})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{k+1}-x^{k+1}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)(x+\Delta x)^k-x^{k+1}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{x(x+\Delta x)^k-x^{k+1}}{\Delta x}+\frac{\Delta x(x+\Delta x)^k}{\Delta x}\right\}$

$=x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^k-x^k}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^k$

$=x(x^k)'+x^k$

$=x(kx^{k-1})+x^k$

$=(k+1)x^k$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f'(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)'=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=(x)'$
$=1\cdot x^{1-1}$
$=1\cdot x^0=\mathbf{1}$

(3) $f'(x)=(x^5)'$
$=5x^{5-1}$
$=\mathbf{5x^4}$

(4) $f'(x)=(x^{2009})'$
$=2009x^{2009-1}$
$=\mathbf{2009x^{2008}}$

탐구하기 / 풀이

1. $\{2g(x)\}'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2g(x+\Delta x)-2g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=\mathbf{2}$$

$2g'(x)$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=2\cdot 1=\mathbf{2}$$

$\therefore \{2g(x)\}'=2g'(x)$

2. $\{f(x)+g(x)\}'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)}{\Delta x}-\frac{f(x)+g(x)}{\Delta x}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x+\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\mathbf{2x+1}$$

$f'(x)+g'(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\mathbf{2x+1}$$

$\therefore \{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3. $\{f(x)g(x)\}'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3\Delta x\cdot x^2+3(\Delta x)^2\cdot x+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{3x^2+3\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2\}=\mathbf{3x^2}$$

$f'(x)g'(x)=2x\times 1=\mathbf{2x}$

$\therefore \{f(x)g(x)\}'\neq f'(x)g'(x)$

58

03 미분법의 공식(2)

탐 구 하 기 / 미분법

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$에 대하여 도함수의 정의를 이용하여 다음에 주어진 두 함수의 도함수를 각각 구하고, 그 결과를 서로 비교하여 보자.

1. $\{2g(x)\}'$, $2g'(x)$
2. $\{f(x)+g(x)\}'$, $f'(x)+g'(x)$
3. $\{f(x)g(x)\}'$, $f'(x)g'(x)$

알 아 보 기 / 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 도함수를 구하여 보자.

함수 $y=f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=cf(x)$ (c는 상수)의 도함수는

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}$$

$$=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=cf'(x)$$

$\therefore \{cf(x)\}'=cf'(x)$

또 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)+g(x)$의 도함수는

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\}-\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}+\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

$\therefore \{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

같은 방법으로 $y=f(x)-g(x)$의 도함수를 구하면

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

이다.

알아보기 / 해설

• 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 각각 미분가능할 때, $y_1=f(x)+g(x)$라고 하면 $y_1'=f'(x)+g'(x)$이므로 $y=f(x)+g(x)+h(x)$의 도함수는 $y=y_1+h(x)$에서

$$y'=y_1'+h'(x)=f'(x)+g'(x)+h'(x)$$

임을 알 수 있다.

즉, 두 함수의 합의 미분법은 세 함수로도 확장할 수 있다.

• 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

(단, a_i는 상수, $i=0, 1, 2, \cdots, n$)

의 도함수를 구하기 위해서는 다음과 같이 함수의

또 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x+\Delta x)+f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \\ &\quad + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{\Delta x} \\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \end{aligned}$$

$\therefore \{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분법의 공식

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $y=cf(x)$이면 $y'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

| **보기** | 함수 $y=(2x+1)(x^2+3)$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= (2x+1)'(x^2+3)+(2x+1)(x^2+3)' \\ &= 2(x^2+3)+(2x+1)\cdot 2x \\ &= 2x^2+6+4x^2+2x \\ &= 6x^2+2x+6 \end{aligned}$$

스스로 하기 / 익힘책 43쪽 | 익힘책 44쪽 | 익힘책 45쪽

1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^{10}-2x^5+3$ (2) $y=x^2(3x+1)$

(3) $y=(2x-1)^2$ (4) $y=(3x^4-1)(2x+3)$

실수배, 합, 차, 곱의 미분법의 공식을 활용한다.

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)' \\ &= (a_n x^n)' + (a_{n-1}x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \\ &= a_n (x^n)' + a_{n-1}(x^{n-1})' + \cdots + a_1 x' + 0 \\ &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

• 두 함수의 곱의 미분법

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

는 세 함수의 곱의 미분법

$$\begin{aligned} & \{f(x)g(x)h(x)\}' \\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x) \\ &\quad +f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

로 확장할 수 있다.

보충 학습

곱의 미분법의 공식을 이용하여 $\{f(x)\}^n$의 도함수를 유도할 수 있다.

$\{f(x)\}^2=f^2$, $\{f(x)\}^3=f^3$, $\cdots$으로 나타내고 $f(x)f(x)=f\cdot f$로 나타내면

$(f^2)'=(f\cdot f)'=f'\cdot f+f\cdot f'=2f\cdot f'$

$$\begin{aligned} (f^3)' &= (f\cdot f\cdot f)' \\ &= f'\cdot f\cdot f+f\cdot f'\cdot f+f\cdot f\cdot f' \\ &= 3f^2\cdot f' \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$(f^n)'=(\underbrace{f\cdot f\cdots f}_{n\text{개}})'=nf^{n-1}\cdot f'$

따라서 $\{f(x)\}^n$의 도함수는

$$n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

이다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $y'=(x^{10}-2x^5+3)'$

$\quad = \mathbf{10x^9-10x^4}$

(2) $y'=\{x^2(3x+1)\}'$

$$\begin{aligned} &= (x^2)'(3x+1)+x^2(3x+1)' \\ &= 2x(3x+1)+x^2\cdot 3 \\ &= \mathbf{9x^2+2x} \end{aligned}$$

(3) $y'=\{(2x-1)^2\}'$

$$\begin{aligned} &= (4x^2-4x+1)' \\ &= \mathbf{8x-4} \end{aligned}$$

(4) $y'=\{(3x^4-1)(2x+3)\}'$

$$\begin{aligned} &= (3x^4-1)'(2x+3) \\ &\quad +(3x^4-1)(2x+3)' \\ &= 12x^3(2x+3)+(3x^4-1)\cdot 2 \\ &= 24x^4+36x^3+6x^4-2 \\ &= \mathbf{30x^4+36x^3-2} \end{aligned}$$

중단원 확인하기 / 풀이

60



중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수,
Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

Ⅱ_1. 미분계수와 도함수

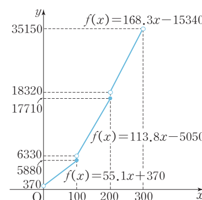
미분계수 — 계산
1 다음 함수의 $x=-2$에서의 미분계수를 구하여라.
(1) $f(x)=-x^3+2x$ (2) $f(x)=(1-x^2)(1-x^3)$

미분계수의 기하학적 의미 — 이해
2 다음 곡선 위에 있는 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.
(1) $y=-4x^2+2x$ $(0,\ 0)$ (2) $y=3x^2(x-1)$ $(-1,\ -6)$

미분법 — 계산
3 다음 함수를 미분하여라.
(1) $y=2x^2-x+1$ (2) $y=(x-1)(x-2x^2)$
(3) $y=(x^2-2x)^2$ (4) $y=x(x+1)(2x+1)$

미분계수의 기하학적 의미 — 이해
4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+b$의 그래프 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 5일 때, 두 실수 a, b의 값을 각각 구하여라.

전기 사용 요금 — 문제 해결
5 2007년 1월 15일부터 적용된 전기 요금표에 의하여 주택용 전기 사용량이 x kWh일 때, 요금을 $f(x)$원이라고 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $0<x<300$에서 미분가능한 구간을 구하여라.



1 (1) $f'(x)=-3x^2+2$

$\therefore f'(-2)=-3\cdot(-2)^2+2$
$=-12+2=\mathbf{-10}$

(2) $f'(x)$
$=\{(1-x^2)(1-x^3)\}'$
$=(1-x^2)'(1-x^3)+(1-x^2)(1-x^3)'$
$=-2x(1-x^3)+(1-x^2)(-3x^2)$
$=5x^4-3x^2-2x$

$\therefore f'(-2)$
$=5\cdot(-2)^4-3\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)$
$=80-12+4=\mathbf{72}$

2 (1) $y'=(-4x^2+2x)'=-8x+2$

따라서 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $y'=-8\cdot0+2=\mathbf{2}$

(2) $y'=(3x^2)'(x-1)+3x^2(x-1)'$
$=6x(x-1)+3x^2\cdot1$
$=9x^2-6x$

따라서 점 $(-1,\ -6)$에서의 접선의 기울기는
$y'=9\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=9+6=\mathbf{15}$

3 (1) $y'=(2x^2-x+1)'=\mathbf{4x-1}$

(2) $y'=\{(x-1)(x-2x^2)\}'$
$=(x-1)'(x-2x^2)+(x-1)(x-2x^2)'$
$=x-2x^2+(x-1)(1-4x)$
$=\mathbf{-6x^2+6x-1}$

(3) $y'=\{(x^2-2x)^2\}'=(x^4-4x^3+4x^2)'$
$=\mathbf{4x^3-12x^2+8x}$

(4) $y'=\{x(x+1)(2x+1)\}'$
$=\{x(x+1)\}'(2x+1)+x(x+1)(2x+1)'$
$=\{x'(x+1)+x(x+1)'\}(2x+1)+x(x+1)\cdot2$
$=(2x+1)(2x+1)+2x(x+1)$
$=\mathbf{6x^2+6x+1}$

4 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(1)=5$이므로 $3+2a=5$
$\therefore \mathbf{a=1}$

$f(1)=3$이므로 $1+a+b=1+1+b=3$
$\therefore \mathbf{b=1}$

5 함수 $y=f(x)$는 $x=100$, $x=200$에서 불연속이므로 $x=100$, $x=200$에서 미분가능하지 않다.
한편 세 구간 $(0,\ 100)$, $(100,\ 200)$, $(200,\ 300)$에서 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선이므로 **함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 100)$, $(100,\ 200)$, $(200,\ 300)$**에서 미분가능하다.

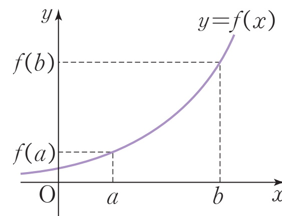
중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.282

01 바탕

오른쪽 그림의 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 중 $\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$에 대한 설명으로 옳은 것은?



① $y=f(x)$의 도함수이다.
② $x=a$에서의 평균변화율이다.
③ $x=a$에서의 순간변화율이다.
④ 구간 $[a, b]$에서의 평균변화율이다.
⑤ 구간 $[a, b]$에서의 순간변화율이다.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$를 이용한다.

02 기본

다음 보기 중 미분계수 $f'(a)$와 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

ㄴ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

ㄷ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$

ㄹ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a-2h)}{4h}$

① ㄱ, ㄴ
② ㄱ, ㄷ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ
⑤ ㄷ, ㄹ

03 바탕

다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=x^2+2x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(2) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

04

실력

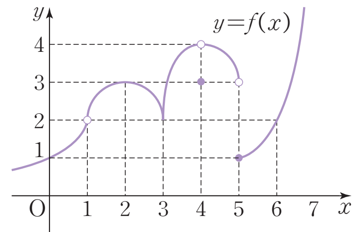
다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(2)=4$일 때,

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(2+\frac{2}{n}\right)-f\left(2-\frac{2}{n}\right)\right\}$의 값을 구하여라.

05

실력

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 구간 $(0,\ 7)$에서 함수 $f(x)$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① $f'(6)>0$

② $f'(x)=0$인 점은 2개이다.

③ $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재한다.

④ 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 3개이다.

⑤ 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 4개이다.

$y=f(x)$에서 $f'(x)=9$인 x의 값을 구한다.

06

기본

곡선 $y=x^3-3x+1$ 위에 미분계수가 9인 두 점 A, B가 있다. 이때, $\overline{\text{AB}}$의 길이는?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

$f(x)=x^{10}+2x^2-3$으로 놓고 생각한다.

07 기본

$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}+2x^2-3}{x-1}$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

08 바탕

함수 $f(x)=x^5+x$일 때, 미분계수 $f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 6 ⑤ 12

09 바탕

다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x+1)(2x-1)$
(2) $y=(x^2-1)(x^3+2)$
(3) $y=(x^2-1)(2x+1)(x+1)$
(4) $y=(2x-1)^3$

$\Delta x=0+\Delta x$임을 이용하여 미분계수를 구한다.

10 기본

다음 중 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$을 만족하는 함수는?

① $f(x)=x^2$ ② $f(x)=2x$
③ $f(x)=2x^2-4x$ ④ $f(x)=x^3-x^2+2x$
⑤ $f(x)=(2x+1)^2$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

11 기본

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 구간 $[1, 2]$에서의 평균변화율이 1일 때, 미분계수 $f'(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

12 기본

함수 $f(x)=x^8-2x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$로 정의한다. 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속일 때, $g(2)$의 값은?

① 1022 ② 1023 ③ 1024 ④ 2047 ⑤ 2048

$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

13 실력

함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x & (x \geq 1) \\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2} & (x<1) \end{cases}$일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

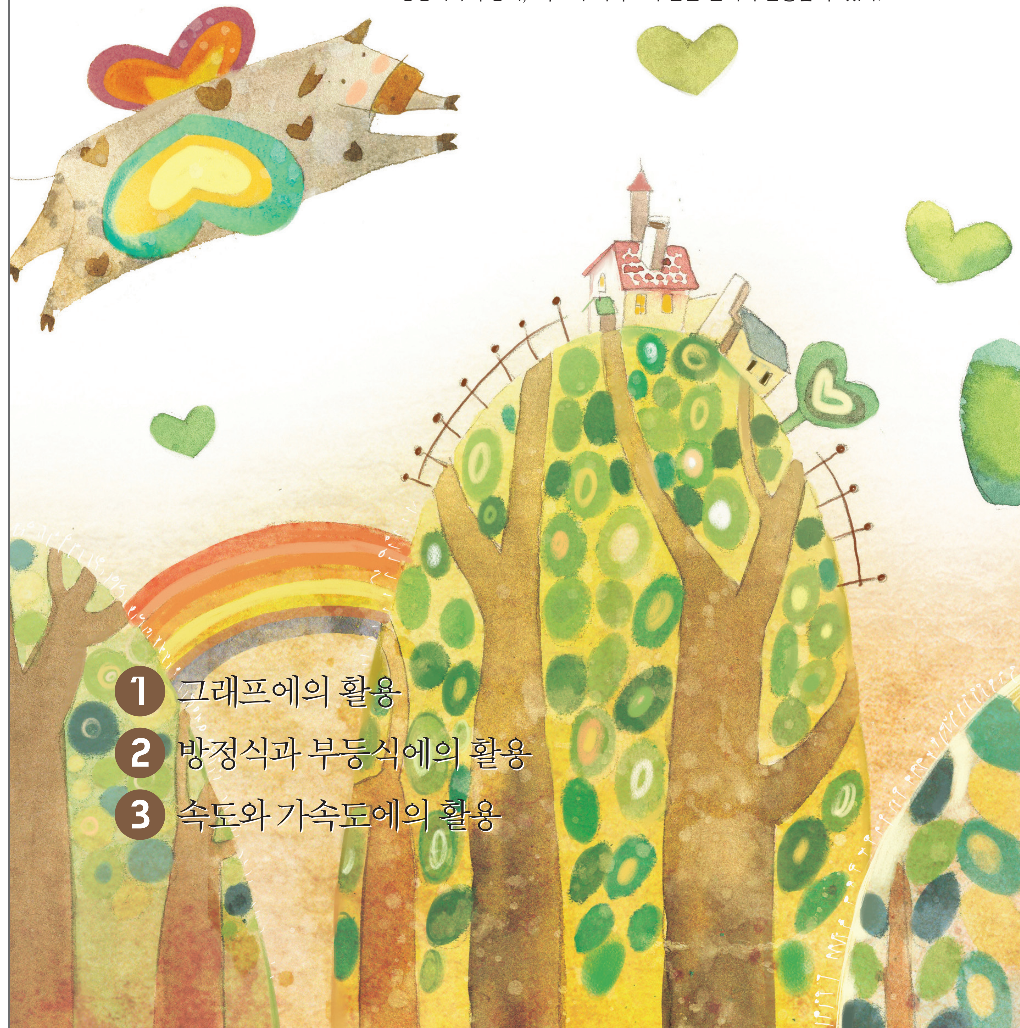
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 도함수의 활용

이 단원을 배우면

- 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정하고, 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- 방정식과 부등식, 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.



1 그래프에의 활용
2 방정식과 부등식에의 활용
3 속도와 가속도에의 활용

소단원의 학습 목표

1. 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2. 도함수를 활용하여 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정하고, 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.
3. 도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

증가, 감소, 극대, 극댓값, 극소, 극솟값, 극값

참고 | 라그랑주(Lagrange, J. L. ; 1736～1813)

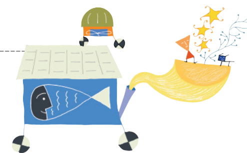
62

2 도함수의 활용

1 그래프에의 활용

학습 목표

- 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정할 수 있다.
- 그래프의 개형을 그릴 수 있다.



다 가 서 기 / 백두대간의 산등성이

백두대간(白頭大幹)이란 백두산(白頭山, 2744 m)에서 시작하여 지리산(智異山, 1915 m)까지 이어지는 큰 산줄기를 말한다. 즉, 백두대간은 한반도의 골간을 이루는 우리 땅의 등뼈이다. 그렇기 때문에 많은 사람들은 백두대간을 종주하는 것에 큰 의미를 두고 있다. 종주는 능선을 따라 걸어, 많은 산봉우리를 넘어가는 것을 뜻한다.

여기서 능선을 매끄러운 곡선으로 볼 때, 도함수를 이용하면 오르막길과 내리막길을 알 수 있다.







프랑스의 수학자 라그랑주는 해석학의 기초에 불만족하여 미적분학을 엄밀하게 하려고 시도한 최초의 수학자로, 후세 수학에 커다란 영향을 주었다. 그의 수학 연구의 방식은 매우 현대적이었으므로 최초의 진정한 해석학자로 평가받고 있다.

라그랑주는 미분방정식과 편미분방정식에서의 연구로 매우 유명하며, 등주문제(等周問題)에서 시작한 변분법(變分法)은 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)의 방법을 순수하게 해석적인 것으로 발전시킨 방법으로, 역학의 여러 문제에 응용되었다.

그는 정수론에도 흥미를 가져서 모든 양의 정수는 네 개 이하의 제곱수의 합으로 표시될 수 있다는 정리를 증명하였다. 한편 대수학에서는 유한군 G의 부분군의 위수는 G의 위수의 약수라는 군론의 중요한 라그랑주의 정리를 만들기도 하였다.

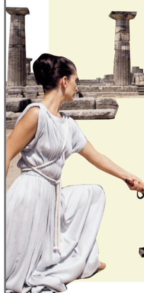
수학자들과 친밀했던 나폴레옹은 라그랑주를 "수리과학 분야에서 치솟은 피라미드"로 평가했다고 한다.

라그랑주 이외에도 각각 다른 과정을 통해 미분법을 발명한 수학자들은 더 있었다. 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)은 물리학에서 속도와 가속도 등과 같은 운동 법칙을 기술하기 위한 수단으로 미분법을 발명하였다. 반면 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)는 곡선을 연구하기 위한 수단, 즉 곡선의 접선과 극대 · 극소 등에 대한 기하학적인 문제를 해결하기 위하여 미분법을 발명하였다.

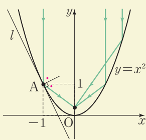
미분을 이용하면 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있고, 이차함수, 삼차함수, 사차함수 등의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

01 접선의 방정식

탐구하기 / 성화 채화와 포물선의 접선



성화를 채화할 때 사용하는 반사경의 단면에는 포물선 모양이 있다. 이 오목한 모양의 반사경에 반사된 태양광선은 한 점에 모여 불을 피우게 된다. 이때, 태양광선이 모이는 위치는 포물선의 접선을 이용하여 구할 수 있다.



오른쪽 그림과 같이 포물선의 방정식이 $y=x^2$일 때, 다음 순서에 따라 점 $A(-1,\ 1)$에서의 접선 l의 방정식을 구하여 보자.

1. 함수 $y=x^2$의 $x=-1$에서의 미분계수를 구하여라.
2. 접선 l의 기울기를 구하여라.
3. 접선 l의 방정식을 구하여라.

알아보기 / 접선의 방정식에 대하여 알아보자.

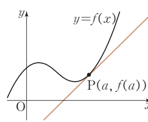
점 $P(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $f'(2)=4$이므로 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $A(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 4이다.

따라서 점 $A(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$$y-4=4(x-2),\ \text{즉}\ y=4x-4$$

일반적으로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다. 따라서 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.



접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

탐구하기 / 풀이

반사경에 빛이 반사될 때, 반사되는 점에서의 접선에 대하여 입사각과 반사각은 같다. 따라서 서로 다른 두 점에서의 접선을 그리고 평행광선을 반사시켰을 때 만나는 점이 초점이 된다.

1. $y'=2x$이므로 함수 $y=x^2$의 $x=-1$에서의 미분계수는 $2\cdot(-1)=\mathbf{-2}$

2. 접선 l의 기울기는 함수 $y=x^2$의 $x=-1$에서의 미분계수와 같으므로 $\mathbf{-2}$

3. 접선 l의 기울기가 -2이고 한 점 $A(-1,\ 1)$을 지나므로
   $y-1=-2(x+1)$
   $\therefore\ \boldsymbol{y=-2x-1}$

알아보기 / 해설

- 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

- 일반적으로 기울기가 m인 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.
  (1) 접점을 $P(a,\ f(a))$로 놓는다.
  (2) 방정식 $f'(a)=m$에서 a를 구한다.
  (3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에서 접선의 방정식을 구한다.
- 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(\alpha,\ \beta)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.
  (1) 접점을 $P(a,\ f(a))$로 놓는다.
  (2) $f'(a)$를 구한다.
  (3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여 a를 구한다.

참고 | 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)

페르마는 해석기하학과 확률론뿐만 아니라, 수론 분야에도 빛나는 업적을 남겼다.
그가 1629년에 고안한 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 구하는 방법은 '페르마의 방법'이라고 불리는데, 이는 미분법의 최초의 착상이라고 볼 수 있다. '평면 및 입체 궤적 입문'이라는 논문에서 접선과 원, 쌍곡선, 타원, 포물선에 관한 고찰을 볼 수 있는데 이는 대수학을 기하학에 응용하는 방법을 설명한 것이다. 한편 페르마는 방정식으로 나타내어진 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하는 일반적인 방법을 고안했으며, 이 방법으로 여러 가지 곡선의 접선을 구했다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f(x)=x^2-x$

로 놓으면

$f'(x)=2x-1$이므로 접점

$\mathrm{P}(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=(2\cdot2-1)(x-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=3x-4}$

(2) $f(x)=-x^2+2x-1$

로 놓으면

$f'(x)=-2x+2$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=-2a+2=-2$

$\therefore a=2$

이때, $f(2)=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=-2(x-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-2x+3}$

(3) 접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2)$이라고 하자.

$f(x)=3x^2$

으로 놓으면

$f'(x)=6x$이므로 $\quad f'(a)=6a$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3a^2=6a(x-a)$

즉, $y=6ax-3a^2$ …… ㉠

이때, 접선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(1, -9)$를 지나므로

$-9=6a-3a^2$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

㉠에 $a=-1$ 또는 $a=3$을 대입하면, 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{y=-6x-3}$ **또는** $\boldsymbol{y=18x-27}$

64

함 께 하 기 /  익힘책 49쪽 |  익힘책 51쪽 |  익힘책 53쪽

1 곡선 $y=(x-1)^2+1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

풀이

$f(x)=(x-1)^2+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=2(x-1)$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=2(a-1)=2 \qquad \therefore a=2$

이때, $f(2)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=2(x-2) \qquad \therefore$ $\boldsymbol{y=2x-2}$

2 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서 곡선 $y=x^2-2x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

먼저 주어진 점이 곡선 위의 점인지 확인한 후, 곡선 밖의 점이 주어졌을 때에는 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 a의 값을 먼저 구한다.

풀이

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a)$라고 하자.

$f(x)=x^2-2x$로 놓으면 $f'(x)=2x-2$이므로

$f'(a)=2a-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$

즉, $y=(2a-2)x-a^2$ …… ㉠

이때, 접선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$를 지나므로

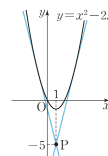
$-5=(2a-2)-a^2$

$a^2-2a-3=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

㉠에 $a=-1$ 또는 $a=3$을 대입하면, 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{y=-4x-1}$ **또는** $\boldsymbol{y=4x-9}$



스 스 로 하 기 /  익힘책 49쪽 |  익힘책 51쪽 |  익힘책 53쪽

1 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^2-x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$에서의 접선

(2) 곡선 $y=-x^2+2x-1$에 접하고 기울기가 -2인 접선

(3) 점 $\mathrm{P}(1,\ -9)$에서 곡선 $y=3x^2$에 그은 접선



Plus 문제

점 $(1,\ -1)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

| 풀이 |

접점을 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$

점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $\quad -1-a^2=2a(1-a)$

$a^2-2a-1=0$ …… ㉠

㉠의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1,\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6$

두 접점의 좌표는 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$

$=4+4+36-4=40 \qquad \therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$

65

02 함수의 증가와 감소

알아보기 / 함수의 증가와 감소의 뜻을 알아보자.

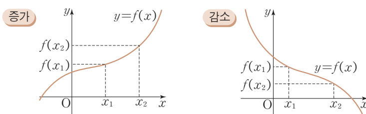
함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$x_1<x_2 \text{일 때,} \quad f(x_1)<f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 그 구간에서 **증가**한다고 한다. 한편

$$x_1<x_2 \text{일 때,} \quad f(x_1)>f(x_2)$$

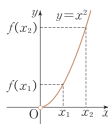
가 성립하면 $f(x)$는 그 구간에서 **감소**한다고 한다.



| 보기 | 함수 $f(x)=x^2$에서 구간 $(0,\ \infty)$의 임의의 두 수 x_1, x_2가 $x_1<x_2$이면

$f(x_1)-f(x_2)$
$=x_1^2-x_2^2$
$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.





스스로 하기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

1 함수 $f(x)=x^3$이 증가하는 구간을 구하여라.

2 농구 경기에서 하프 라인 근처에 있는 어떤 선수가 림(rim)을 향해 공을 던질 때, 하프 라인에서 공까지의 수평 거리를 x m라 하고 바닥에서 공까지의 높이를 y m라고 하면

$$y=-0.08(x-6.25)^2+5.875$$

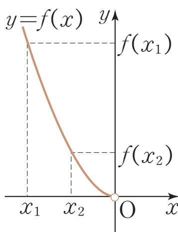
의 관계식이 성립한다. 이때, 구간 $(6.25,\ 12.5)$에서 주어진 함수가 감소함을 보여라.



알아보기 / 해설

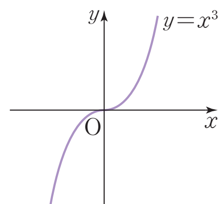
- x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하면 함수 $f(x)$는 증가한다고 하며, x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하면 함수 $f(x)$는 감소한다고 한다.

- 함수 $f(x)=x^2$에서 구간 $(-\infty,\ 0)$의 임의의 두 수 x_1, x_2가 $x_1<x_2$이면
$f(x_1)-f(x_2)$
$=x_1^2-x_2^2$
$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$
이므로 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소한다.



스스로 하기 / 풀이

1 함수 $f(x)=x^3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

2 $f(x)$
$=-0.08(x-6.25)^2+5.875$
로 놓으면 구간 $(6.25,\ 12.5)$의 임의의 두 수 x_1, x_2가 $x_1<x_2$일 때
$f(x_2)-f(x_1)$
$=\{-0.08(x_2-6.25)^2+5.875\}$
$\quad -\{-0.08(x_1-6.25)^2+5.875\}$
$=-0.08\{x_2^2-12.5x_2+(6.25)^2\}$
$\quad +0.08\{x_1^2-12.5x_1+(6.25)^2\}$
$=0.08\{x_1^2-x_2^2-12.5(x_1-x_2)\}$
$=0.08(x_1-x_2)(x_1+x_2-12.5)$
여기서 $x_1<x_2$이므로
$x_1-x_2<0$
또 $x_1>6.25$, $x_2>6.25$이므로
$x_1+x_2>12.5$에서
$x_1+x_2-12.5>0$
$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$
따라서 함수
$f(x)=-0.08(x-6.25)^2+5.875$
는 구간 $(6.25,\ 12.5)$에서 감소한다.

66

알 아 보 기 / 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 알아보자.

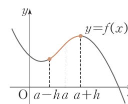
함수 $f(x)$에서 충분히 작은 양수 h에 대하여

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$

일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다고 한다. 또

$$f(a-h)>f(a)>f(a+h)$$

일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다고 한다.



이제 미분계수의 부호를 이용하여 증가상태와 감소상태를 알아보자.

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 양수이면, 즉

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

을 만족하면 절댓값이 충분히 작은 Δx에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

이때, $\Delta x>0$이면 $f(a+\Delta x)-f(a)>0$이므로 $f(a)<f(a+\Delta x)$이고, $\Delta x<0$이면 $f(a+\Delta x)-f(a)<0$이므로 $f(a+\Delta x)<f(a)$이다.

따라서 $h=|\Delta x|$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$

그러므로 $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있음을 알 수 있다.

> $f'(a)<0$이면 절댓값이 충분히 작은 Δx에 대하여 $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$
> $h=|\Delta x|$로 놓으면 $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$
> 이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

이와 같이 미분계수의 부호를 이용하면 함수의 증가상태와 감소상태를 알 수 있다.

함수의 증가상태와 감소상태

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

(1) $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

(2) $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

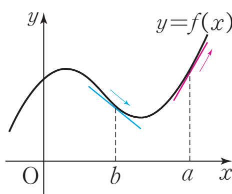
> 함수 $f(x)=x^3$은 $x=0$에서 증가상태에 있지만 $f'(0)=0$이다. 따라서 함수의 증가상태와 감소상태에 대한 오른쪽 명제의 역은 성립하지 않는다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 점에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간의 모든 점에서 증가상태에 있으므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

또 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 점에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간의 모든 점에서 감소상태에 있으므로 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

알아보기 / 해설

• 다음 그림의 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(a)>0$이다.
또 점 $(b,\ f(b))$에서는 접선의 기울기가 음수이므로 $f'(b)<0$이다.

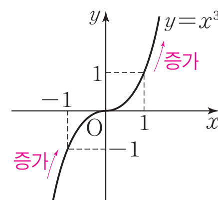


이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서는 증가상태이고, $x=b$에서는 감소상태이다.
따라서 그래프에서 $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태이고, $f'(b)<0$이면 $f(x)$는 $x=b$에서 감소상태임을 확인할 수 있다.

• 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 $f(x)$의 증가상태 및 감소상태를 정리하면 다음과 같다.

1. $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태
   $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태
2. 어떤 구간의 모든 x에 대하여
   $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가
   $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소
3. 정의역의 모든 x에 대하여
   $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가함수
   $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 감소함수

• 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 하지만 $f(x)$가 증가하면 그 구간에서 $f'(x)\ge 0$이다.
또한 어떤 구간에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다. 하지만 $f(x)$가 감소하면 그 구간에서 $f'(x)\le 0$이다.
다항함수 $f(x)$가 어떤 구간 $[\alpha,\ \beta]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)$는 증가하고, $f'(x)<0$이면 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)$는 감소한다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$을 생각하여 보자.
함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가하지만 $f'(x)=3x^2\ge 0$임을 알 수 있다.



67

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분가능한 함수 $f(x)$가
증가하면 $f'(x)\ge 0$
감소하면 $f'(x)\le 0$

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

함께 하기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

1 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 증가와 감소를 조사하여라.

풀이

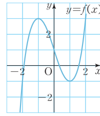
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

오른쪽 표를 증감표라 하고 ↗는 $f(x)$가 증가하는 것을 ↘는 $f(x)$가 감소하는 것을 나타낸다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗



따라서 함수 $f(x)$는 **구간 $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$에서 증가**하고 **구간 $(-1,\ 1)$에서 감소**한다.

스스로 하기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

3 함수 $f(x)=x^4$이 다음 x의 값에서 증가상태인지 감소상태인지 조사하여라.

(1) $x=-1$ $\qquad$ (2) $x=1$

4 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2-6x$ $\qquad$ (2) $f(x)=x^3-3x^2+1$

(3) $f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$ $\qquad$ (4) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$

스스로 하기 / 풀이

3 $f'(x)=4x^3$에서

(1) $f'(-1)=-4<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 **감소상태**에 있다.

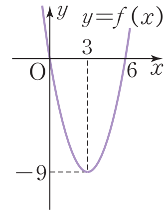
(2) $f'(1)=4>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 **증가상태**에 있다.

4 (1) $f'(x)=2x-6$이므로

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗



따라서 $f(x)$는 **구간 $(-\infty, 3)$에서 감소하고 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.**

(2) $f'(x)=3x^2-6x$
$=3x(x-2)$

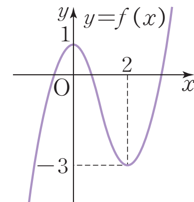
이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗



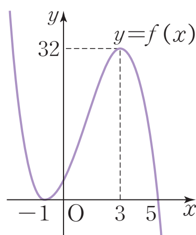
따라서 $f(x)$는 **구간 $(-\infty,\ 0)$, $(2,\ \infty)$에서 증가하고 구간 $(0,\ 2)$에서 감소한다.**

(3) $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	32	↘



따라서 $f(x)$는 구간 **$(-\infty, -1)$, $(3, \infty)$에서 감소하고 구간 $(-1, 3)$에서 증가한다.**

(4) $f'(x)=4x^3-12x^2+8x$

$=4x(x-1)(x-2)$

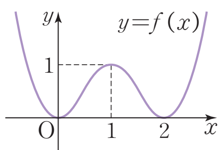
이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗



따라서 **$f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(1, 2)$에서 감소하고 구간 $(0, 1)$, $(2, \infty)$에서 증가한다.**

탐구하기 / 풀이

1. 함수가 증가상태에서 감소상태로 바뀌는 점은 $(0, 1)$이므로 구하는 x좌표의 값은 **0**이다.

2. 함수가 감소상태에서 증가상태로 바뀌는 점은 $(2, -3)$이므로 구하는 x좌표의 값은 **2**이다.

3. $f'(x)=3x^2-6x$이므로 점 $(0, 1)$, $(2, -3)$에서의 함수 $f(x)$의 미분계수는 각각 $\boldsymbol{f'(0)=0}$, $\boldsymbol{f'(2)=0}$이다.

68

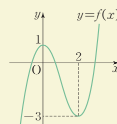
03 함수의 극대와 극소

탐 구 하 기 / 꼭짓점에서의 미분계수

오른쪽 그림은 함수

$f(x)=x^3-3x^2+1$

의 그래프를 나타낸 것이다. 그림을 보고, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수가 증가상태에서 감소상태로 바뀌는 점의 x좌표를 구하여라.
2. 함수가 감소상태에서 증가상태로 바뀌는 점의 x좌표를 구하여라.
3. 물음 1, 2에서 구한 점에서 함수 $f(x)$의 미분계수를 각각 구하여라.

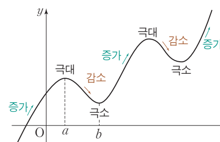
알 아 보 기 / 함수의 극대와 극소에 대하여 알아보자.



페르마(Fermat, P. : 1601~1665)
프랑스의 수학자로 그가 생각한 극댓값과 극솟값을 구하는 방법은 미분법의 최초의 착상이라고 볼 수 있다.

함수 $f(x)=-x^2$은 $x=0$에서 연속이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀐다. 이와 같이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라고 하며 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또 함수 $f(x)=x^2$은 $x=0$에서 연속이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀐다. 이와 같이 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=b$에서 **극소**라고 하며 $f(b)$를 **극솟값**이라고 한다. 이때, 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



| 참고 | (1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $f(a)$가 $x=a$의 충분히 가까운 근방에서 최댓값임을 뜻한다.
(2) 극댓값이 반드시 극솟값보다 큰 것은 아니다.

참고 | 극댓값과 최댓값의 의미

극댓값은 근방에서 최대인 값을 뜻한다. 만일 $f(a)$가 극댓값이면 $x=a$의 충분히 가까운 근방, 즉 a를 포함하는 구간 (c, d)가 존재해서 구간 (c, d)의 모든 x에 대하여 $f(x)\le f(a)$가 성립함을 뜻한다. 그러나 최댓값은 정의역인 구간 $[\alpha, \beta]$에서 가장 큰 값을 뜻하므로 만일 $f(b)$가 최댓값이면 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 x에 대하여 $f(x)\le f(b)$이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $f(a)$가 극댓값이라고 하자.
그러면 절댓값이 충분히 작은 실수 h에 대하여 $f(a)\geq f(a+h)$이므로

$h>0$이면 $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$

$h<0$이면 $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0$

그런데 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$0\leq \lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$$

$\therefore f'(a)=0$

마찬가지로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $f(a)$가 극솟값인 경우에도 $f'(a)=0$임을 보일 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

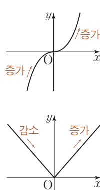
극값의 판정

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

$x=a$에서 극값을 가진다. $\overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ $f'(a)=0$

| 참고 | (1) 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 증가와 감소상태가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 위 명제의 역은 성립하지 않는다.

(2) 함수 $f(x)=|x|$와 같이 $x=0$에서 극솟값을 갖지만 $f'(0)$은 존재하지 않는 경우도 있다.



연속인 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때에도 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 가질 수 있다.

미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소는 다음과 같이 판정할 수 있다.

극대와 극소의 판정법

$f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양에서 음으로 바뀌면 $f(a)$는 극댓값이다.

(2) 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 극솟값이다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면, $x=a$의 좌우에서 함수의 증가상태와 감소상태가 바뀐다.

알아보기 / 해설

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극소일 때 $f'(a)=0$임을 증명하여 보자.
  $f(a)$가 극솟값이라고 하자. 그러면 절댓값이 충분히 작은 h에 대하여 $f(a)\leq f(a+h)$이므로

  $h>0$이면 $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0$

  ($\because$ (분모)>0, (분자)≥ 0)

  $h<0$이면 $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$

  ($\because$ (분모)<0, (분자)≥ 0)

  $f'(a)$가 존재하므로

  $$f'(a)=\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

  $$f'(a)=\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

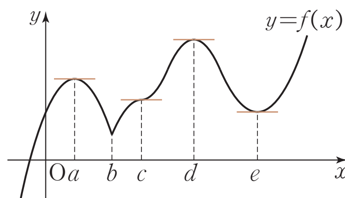
  ㉠, ㉡에서 $f'(a)=0$이다.

- 미분가능과 극대, 극소 사이의 관계는 다음과 같다.
  1. $f'(a)$가 존재하고 $f(a)$가 극값 $\Longrightarrow f'(a)=0$ (참)
  2. $f(a)$가 극값 $\Longrightarrow f'(a)=0$ (거짓)
  3. $f'(a)=0 \Longrightarrow f(a)$는 극값 (거짓)

- 극대와 극소의 판정은 그래프를 그려서 해도 좋지만, 먼저 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 값을 찾는 것이 더 편리하다.

- 일반적으로 $f(a)$가 극값일지라도 $f'(a)$는 존재하지 않을 수도 있다.
  다음은 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프의 관계를 보인 것이다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	없음	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗



그래프에서 $f(a)$, $f(b)$, $f(d)$, $f(e)$는 극값이지만 $f'(a)=f'(d)=f'(e)=0$이고 $f'(b)$의 값은 존재하지 않는다.
한편 $f'(c)=0$이지만 $x=c$의 좌우에서 증가와 감소상태가 바뀌지 않으므로 극값이 아니다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은

$f(-1)=\mathbf{5}$

$x=3$에서 극소이고 극솟값은

$f(3)=\mathbf{-27}$

(2) $f'(x)=-3x^2+9$

$=-3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

이므로 $f'(0)=0$에서

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	$6\sqrt{3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극대이고

극댓값은 $f(\sqrt{3})=\mathbf{6\sqrt{3}}$

$x=-\sqrt{3}$에서 극소이고 극솟값은

$f(-\sqrt{3})=\mathbf{-6\sqrt{3}}$

2 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=-3+2a+b=0$ ……㉠

70

함 께 하 기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

1 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+3$의 극값을 구하여라.

풀이

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극대이고 **극댓값은** $f(0)=\mathbf{3}$

$x=1$에서 극소이고 **극솟값은** $f(1)=\mathbf{2}$

2 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가진다고 한다. 이때, a, b, c의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

풀이

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$는 $x=0$, 2에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$ ……㉠

$f'(2)=12+4a+b=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\mathbf{a=-3,\ b=0}$

또 $x=0$일 때, 극댓값이 0이므로 $f(0)=0$ $\therefore \mathbf{c=0}$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로 **극솟값은** $f(2)=\mathbf{-4}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

1 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x$ (2) $f(x)=-x^3+9x$

2 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$은 $x=1$에서 극댓값 3을 가진다. 이때, a, b의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

또 $x=1$일 때, 극댓값이 3이므로

$f(1)=-1+a+b+1=a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\mathbf{a=0,\ b=3}$

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=\mathbf{-1}$

04 함수의 그래프의 개형

알아보기 / 함수의 그래프를 그려 보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

1단계 도함수 $f'(x)$를 구한다.
2단계 $f'(x)=0$의 해를 구한다.
3단계 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 극값을 구한다.
4단계 그래프의 개형을 그린다.

예를 들어 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$의 그래프의 개형을 그려 보자.

1단계 도함수 $f'(x)$를 구하면

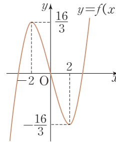
$$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$$

2단계 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

3단계 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 극값을 구하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{16}{3}$ 극댓값	↘	$-\frac{16}{3}$ 극솟값	↗

4단계 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



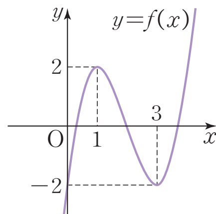
스스로 하기 / 익힘책 49쪽 | 익힘책 51쪽 | 익힘책 53쪽

1 다음 함수의 극값을 구하고, 그 그래프의 개형을 그려라.
(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ (2) $f(x)=-2x^3+5x^2+4x+1$
(3) $f(x)=2x^4-4x^2+1$ (4) $f(x)=-3x^4+4x^3$

스스로 하기 / 풀이

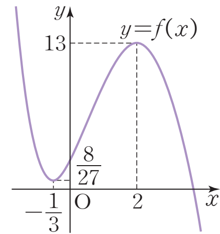
1 (1) $f'(x)=3x^2-12x+9$
$=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	**2** 극댓값	↘	**−2** 극솟값	↗



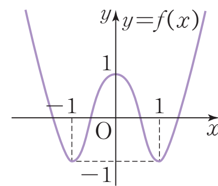
(2) $f'(x)=-6x^2+10x+4$
$=-2(3x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$\frac{8}{27}$ 극솟값	↗	**13** 극댓값	↘



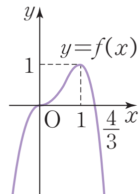
(3) $f'(x)=8x^3-8x$
$=8x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	**−1** 극솟값	↗	**1** 극댓값	↘	**−1** 극솟값	↗



(4) $f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗	**1** 극댓값	↘



소단원의 학습 목표

1. 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.
2. 도함수를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.

2 방정식과 부등식에의 활용



학습 목표

• 도함수를 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **실근의 개수**



이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식은 일반적인 해법, 즉 근의 공식이 존재한다. 그러나 오차 이상의 방정식의 근의 공식은 존재하지 않는다는 것은 수학자 아벨(Abel, N. H. ; 1802~1829)이 처음으로 밝혔다.

수학 이야기 |

카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)의 삼차방정식의 해법

삼차방정식

$x^3+ax^2+bx+c=0$ ......㉠

에서 $x=y-\dfrac{a}{3}$로 놓으면

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

$$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+c-\frac{1}{3}ab+\frac{2}{27}a^3=0$$

여기서 $p=b-\dfrac{a^2}{3}$, $q=c-\dfrac{1}{3}ab+\dfrac{2}{27}a^3$으로 놓으면 $y^3+py+q=0$ ......㉡

$y=u+v$로 놓고 ㉡에 대입하면

$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$

$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$

u와 v를 $3uv+p=0$ ......㉢

이 되도록 하면 $u^3+v^3=-q$, $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$

근과 계수의 관계에서 u^3, v^3은 이차방정식

$t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$의 근이다. 이것을 풀면

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

즉, $\alpha=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$

$\beta=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$

으로 놓으면 1의 세제곱근 $\omega(\omega\neq1)$에 대하여

$$u=\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2$$
$$v=\beta,\ \beta\omega,\ \beta\omega^2$$

그런데 u, v는 ㉢을 만족하여야 하므로 $y=u+v$를 만들면 ㉡의 근은 다음과 같다.

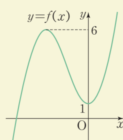
$$y=\alpha+\beta,\ \alpha\omega+\beta\omega^2,\ \alpha\omega^2+\beta\omega$$

이것을 $x=y-\dfrac{a}{3}$에 대입하면 삼차방정식 ㉠의 해를 구할 수 있다.

01 방정식에의 활용

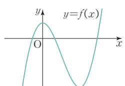
탐구하기 / 교점의 개수

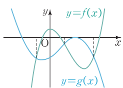
함수 $f(x)=\frac{1}{27}(10x^3+45x^2+27)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 직선 $y=k$와 이 곡선의 교점의 개수를 k의 값에 따라 조사하여 보자.



k의 값	0	1	3	5	6
교점의 개수(개)		2			2

알아보기 / 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.





방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다. 또 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

일반적으로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하면 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수를 구할 수 있다.

| 보기 | 방정식 $x^3-6x^2+9x-1=0$의 실근의 개수를 구하기 위하여

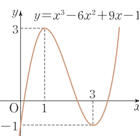
$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

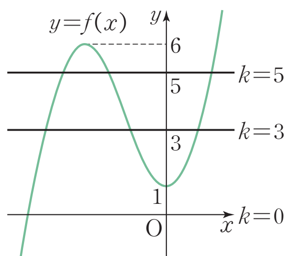
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3 극댓값	↘	−1 극솟값	↗



따라서 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-1$은 x축과 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-6x^2+9x-1=0$의 실근은 3개이다.

탐구하기 / 풀이

다음 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수를 조사한다.



따라서 주어진 표를 완성하면 다음과 같다.

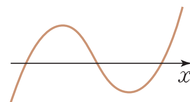
k의 값	0	1	3	5	6
교점의 개수(개)	**1**	2	**3**	**3**	2

알아보기 / 해설

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$의 그래프를 이용하여 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근을 직접 구하지 않고도 실근의 개수를 구할 수 있다.

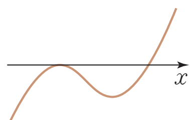
(1) 극값을 갖는 경우

(i) 극댓값과 극솟값의 부호가 다를 때



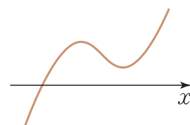
$y=f(x)$는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.

(ii) 극댓값 또는 극솟값이 0일 때



$y=f(x)$는 x축과 접하고 다른 한 점을 지나므로 $f(x)=0$은 중근과 다른 하나의 실근을 가진다.

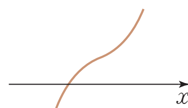
(iii) 극댓값과 극솟값의 부호가 같을 때



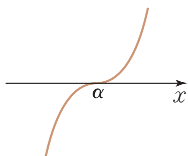
$y=f(x)$는 x축과 한 점에서 만나므로 $f(x)=0$은 하나의 실근과 두 허근을 가진다.

(2) 극값을 갖지 않는 경우

(i) x축과 한 점에서 만나고 그 점에서 x축에 접하지 않을 때, $f(x)=0$은 하나의 실근과 두 허근을 가진다.



(ii) x축과 $x=\alpha$에서 접할 때, $f(x)=0$은 삼중근 α를 가진다.

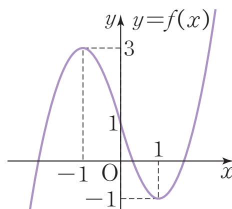


스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3 극댓값	↘	-1 극솟값	↗



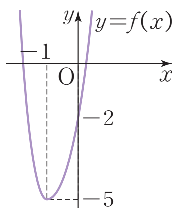
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 **3**개이다.

(2) $f(x)=x^4+4x-2$로 놓으면

$f'(x)=4(x+1)(x^2-x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5 극솟값	↗

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 **2**개이다.



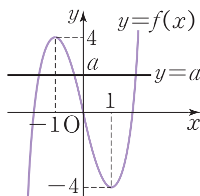
2 $f(x)=2x^3-6x$로 놓으면

$f'(x)=6(x+1)(x-1)$이므로

극댓값: $f(-1)=4$

극솟값: $f(1)=-4$

주어진 방정식의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로



74

함 께 하 기 /　　익힘책 57쪽 | 익힘책 58쪽 | 익힘책 59쪽

1 방정식 $x^3-3x^2=a$가 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 상수 a값의 범위를 구하여라.

풀이

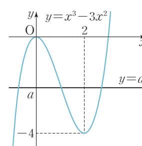
$f(x)=x^3-3x^2$으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서　$x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 극댓값	↘	-4 극솟값	↗



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-3x^2$과 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 a값의 범위는

$$-4<a<0$$

스 스 로 하 기 /　　익힘책 57쪽 | 익힘책 58쪽 | 익힘책 59쪽

1 그래프를 이용하여 다음 방정식의 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x+1=0$　　(2) $x^4+4x-2=0$

2 방정식 $2x^3-6x-a=0$이 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 상수 a값의 범위를 구하여라.

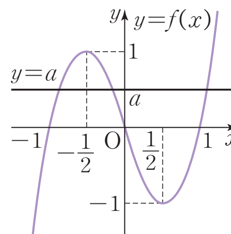
3 방정식 $4x^3=3x+a$가 단 하나의 실근을 가지고, 그 실근이 양수가 되기 위한 a값의 범위를 구하여라.

$\mathbf{-4<a<4}$일 때 서로 다른 세 실근을 가진다.

3 $f(x)=4x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3(2x+1)(2x-1)$이므로

극댓값: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, 극솟값: $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=4x^3-3x$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로 $\mathbf{a>1}$일 때 단 하나의 양의 실근을 가진다.

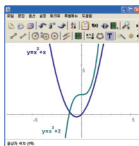
75

02 부등식에의 활용

알 아 보 기 / 함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명하는 방법을 알아보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 보이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 주어진 구간에서 x축의 위쪽에 있음을 보이면 된다.

또 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 보이려면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 주어진 구간에서 x축의 위쪽에 있음을 보이면 된다.



$y=x^3+2$와 $y=x^2+x$의 그래프

| 보기 | $x\geq 0$일 때, $x^3+2>x^2+x$가 성립함을 보이기 위하여

$f(x)=(x^3+2)-(x^2+x)$로 놓으면

$f(x)=x^3-x^2-x+2$이므로

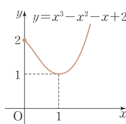
$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1 극솟값	↗



어떤 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이면 $f(x)>0$이다.

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=1$이므로 $f(x)>0$

$x^3-x^2-x+2>0$이므로 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3+2>x^2+x$가 성립한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 57쪽 | 익힘책 58쪽 | 익힘책 59쪽

1 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(1) $x\geq -1$일 때, $x^3>3x^2-5$

(2) 모든 x에 대하여 $3x^4-4x^3+1\geq 0$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $f(x)=x^3-(3x^2-5)$로 놓으면

$f(x)=x^3-3x^2+5$이므로

$f'(x)=3x^2-6x$

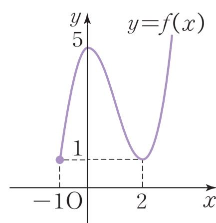
$=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	5 극댓값	↘	1 극솟값	↗



$x\geq -1$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=f(2)=1$이므로

$f(x)>0$

즉, $x^3-3x^2+5>0$

따라서 $x\geq -1$일 때, 부등식

$x^3>3x^2-5$가 성립한다.

(2) $f(x)=3x^4-4x^3+1$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2$

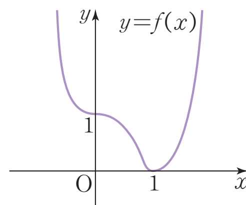
$=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0 극솟값	↗



모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=0$이므로

$f(x)\geq 0$

즉, $3x^4-4x^3+1\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$3x^4-4x^3+1\geq 0$이 성립한다.

소단원의 학습 목표

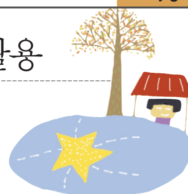
1. 도함수를 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다.

2 도함수의 활용

3 속도와 가속도에의 활용

학습 목표

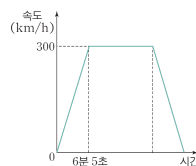
• 도함수를 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다.



다 가 서 기 / **평균속도와 속도**

2004년 4월 1일 개통된 한국고속철도(KTX)를 이용하면 서울에서 부산까지 약 2시간 40분이 소요된다.

서울과 부산 사이 철로의 길이가 약 400 km이므로 이 구간을 운행하는 KTX의 평균속도는 약 150 km/h 이다. 하지만 KTX의 운행 속도는 정지 상태에서 출발 후 점차 가속하여 6분 5초 후에는 최고 300 km/h에 도달한다.





다가서기 / 해설

어떤 물체가 움직이는 속도(velocity)는 크기와 방향을 가진 양으로 속력(speed)과는 구별된다.

보통 속도는 평균속도와 순간속도로 구분하여 사용하는데 평균속도는 물체 위치의 평균변화율, 순간속도는 물체 위치의 순간변화율을 뜻한다.

참고 | 한국고속철도(KTX)

고속철도의 정의는 시대적 시간가치와 사회적 여건에 따라 다소 차이가 있다. 과학 기술이 발전함에 따라 철도의 속력이 더 빨라지기 때문이다.

한국의 고속철도 건설 규칙에서도 "고속철도라 함은 열차가 주요 구간을 200 km/h 이상의 속도로 주행하는 철도로서 건설교통부 장관이 지정, 고시하는 철도를 말한다."라고 정의하고 있다.

속도면에서는 현재 실용화된 교통기관 중 비행기 다음이고 대량 수송면에서는 선박 다음이나, 안전성은 비행기와 선박보다 뛰어나다.

이러한 고속철도의 장점은 신속성, 안전성, 정확한 운행성, 편리한 이용성, 대량 수송 가능, 환경보호 등이 있다.

우리나라에서의 고속철도는 2004년 4월에 처음으로 개통하였으며 현재는 평균 300 km/h로 운행하고 있다.

77

01 속도와 가속도

탐 구 하 기 / 보스니아 전통 다이빙 대회와 변화율

보스니아의 모스타르에서는 매년 여름 오랫동안 이어져 온 전통 다이빙 대회가 열린다.

높이가 22 m인 다리에서 다이빙 한 선수의 t초 후의 높이를 $f(t)$라고 하면

$$f(t)=-5t^2+2t+22$$

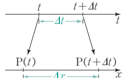
의 관계식이 성립한다. 다음 물음에 답하여 보자.


보스니아 모스타르의 스타리 모스트 다리

1. 1초에서 2초 사이의 높이의 평균변화율을 구하여라.
2. $t=2$일 때, 높이의 순간변화율을 구하여라.

알 아 보 기 / 도함수를 이용하여 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구하여 보자.

점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 좌표를 x라고 하면 x는 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타낼 수 있다.



시각이 t에서 $t+\Delta t$까지 변할 때, 점 P의 평균속도는 함수 $x=f(t)$의 평균변화율이며 다음과 같다.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

이때, 함수 $x=f(t)$의 순간변화율을 점 P의 순간속도 또는 속도라 하고, 기호로 v와 같이 나타낸다. 즉, 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

이고, 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

한편 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 v가 주어질 때, 속도 v의 도함수 $\frac{dv}{dt}$는 점 P의 시각 t에서의 속도의 순간변화율을 의미한다.

이와 같이 시각 t에 따른 속도의 변화, 즉 속도 v의 순간변화율을 가속도라 하고, 기호로 a와 같이 나타낸다. 즉, 가속도 a는

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

알아보기 / 해설

- 속도는 위치의 순간변화율이며 방향과 크기를 동시에 갖는 양이므로 크기만을 갖는 속력과는 구별된다. 이때, 가속도는 속도의 순간변화율이므로 방향을 가진 양이다.
- 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타날 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=f'(t)$이므로 점 P의 속력은 $|v|=|f'(t)|$이다.

탐구하기 / 풀이

1. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$
$=-5\cdot 2^2+2\cdot 2+22-(-5+2+22)$
$=\mathbf{-13}$

2. $f'(t)=-10t+2$이므로
$f'(2)=-10\cdot 2+2$
$=\mathbf{-18}$

참고 | 보스니아의 전통 다이빙 대회

보스니아에서 전통으로 이어지고 있는 다이빙 대회는 수도인 사라예보에서 75 km 정도 떨어진 곳에 위치한 모스타르에 있는 스타리 모스트(Stari Most) 다리에서 매년 열린다.

폭염을 잊게 하고 담력도 키워 주는 이 전통 다이빙 대회는 다리가 처음 세워진 16세기에 시작되었다고 한다.

이후 1992∼1995년 보스니아 내전 당시 다리가 끊겨 대회가 잠시 중단되었다가, 2004년에 다리가 다시 복원되면서 그 전통을 이어가고 있다.

세계 각국에서 모인 다이버들이 네테르바 강 위에 있는 높이 25 m의 다리에서 뛰어내리는 모습은 여름철의 더위를 잊게 해 줄 흥미진진한 볼거리로 유명하다. 또 1618년 세워진 코스키 메흐메드 파샤 모스크(Koski Mehmed Pasa Mosque)의 첨탑에 오르면 네테르바 강과 모스타르의 아름다운 전경을 한눈에 볼 수 있어 관광객들 사이에서 인기가 높다.

78

이상을 정리하면 다음과 같다.

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타날 때, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　　　(2) $a=\dfrac{dv}{dt}$

| 참고 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도 $v=f'(t)$에 대하여 $v>0$이면 $x=f(t)$는 증가하므로 점 P는 직선 위를 속력 $|v|$로 양의 방향으로 움직인다. 그러나 $v<0$이면 $x=f(t)$는 감소하므로 점 P는 직선 위를 속력 $|v|$로 음의 방향으로 움직인다.
따라서 $v=f'(t_1)=0$이고 $t=t_1$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌면 점 P는 $t=t_1$에서 움직이는 방향을 바꾼다.

함 께 하 기 /　　익힘책 61 쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

1 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t$로 나타날 때, $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하여라.

풀이

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-6t+8$$

$$a=\frac{dv}{dt}=2t-6$$

따라서 $t=3$일 때, **속도**는 **−1**, **가속도**는 **0**이다.

스 스 로　하 기 /　　익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

1 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=2t^3-6t^2$으로 나타날 때, $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하여라.

함께하기 / 해설

점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수

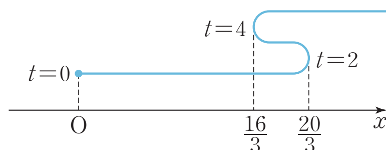
$x=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t$로 나타나면

$v=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$

$v=0$에서　　$t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$일 때 $x=\frac{20}{3}$,　$t=4$일 때 $x=\frac{16}{3}$

따라서 시각에 따라 점 P가 움직이는 모양은 다음과 같다.



위의 그림에서 점 P는 원점을 출발하여 오른쪽으로 움직이다가 $t=2$일 때 방향을 바꾸고, $t=4$일 때 다시 방향을 바꾸는 것을 확인할 수 있다.

보충 학습

시각에 따른 여러 가지 변화율

길이 $l(t)$의 시각 t에 대한 변화율은 $l'(t)$이고, 넓이 $S(t)$의 시각 t에 대한 변화율은 $S'(t)$, 부피 $V(t)$의 시각에 대한 변화율은 $V'(t)$이다.
예를 들어 시각 t에 따라 반지름의 길이 $r(t)$가 변하는 구에 대하여 $r(t)=3t$라고 하면 구의 겉넓이 $S(t)$와 부피 $V(t)$는

$$S(t)=36\pi t^2,\ V(t)=36\pi t^3$$

이다. 이때, 반지름의 길이의 변화율, 겉넓이의 변화율, 부피의 변화율은 각각 다음과 같다.

$$r'(t)=3,\ S'(t)=72\pi t,\ V'(t)=108\pi t^2$$

스스로 하기 / 풀이

1 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-12t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=12t-12$$

따라서 $t=3$일 때, **속도는 18**, **가속도는 24**이다.

79

함께하기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽

2 지면에서 초속 80 m로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이를 x m라고 하면

$$x=80t-5t^2$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 물체를 쏘아 올린 지 5초 후의 물체의 속도와 가속도를 구하여라.

(2) 물체가 도달하는 최고의 높이를 구하여라.

풀이

(1) t초 후의 물체의 속도와 가속도를 각각 v, a라고 하면

$$v=80-10t$$

$$a=-10$$

따라서 $t=5$일 때 **속도**는 **30 m/s**, **가속도**는 **-10 m/s^2**이다.

(2) 물체가 최고의 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$80-10t=0$$

$$\therefore t=8$$

따라서 최고의 높이는 $80\cdot8-5\cdot8^2=$**320 (m)**이다.

스스로 하기 / 익힘책 61쪽 | 익힘책 62쪽 | 익힘책 63쪽



2 물 로켓이 발사된 지 t초 후의 높이를 x m라고 하면

$$x=20t-5t^2$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 물 로켓을 쏘아 올린 지 2초 후의 물 로켓의 속도와 가속도를 구하여라.

(2) 물 로켓이 도달하는 최고의 높이를 구하여라.

3 직선 궤도를 달리는 기차가 있다. 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라고 하면

$$x=26t-0.65t^2$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제동을 건 지 2초 후의 속도와 가속도를 구하여라.

(2) 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리를 구하여라.

함께하기 / 해설

1 시각 t에 대한 물체의 위치를 $x(t)$라고 하자.
이때, $x'(t)$는 시각에 대한 물체 위치의 변화율, 즉 속도(velocity) $v(t)$라고 한다. 또한 속도 $v(t)$가 미분가능하면 시각 t에 대한 속도의 변화율 $v'(t)$를 가속도(acceleration) $a(t)$라고 한다.
따라서 다음이 성립한다.

$$v(t)=x'(t),\ a(t)=v'(t)$$

즉, 지상에서 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이를 x m라고 할 때, 관계식 $x=f(t)$가 성립한다면 $v=f'(t)$이다. 이때, $t=t_0$에서의 속도는 $f'(t_0)$이고 $t=t_0$에서의 가속도는 $v'(t_0)$이다. 또한 물체가 지면에 떨어지는 시각은 방정식 $f(t)=0$의 근이다.
한편 직선 궤도 위를 달리는 기차가 제동을 건 지 t초 동안 움직인 거리를 x라고 할 때, $x=f(t)$를 만족하면 기차가 정지하는 시각은 속도가 0일 때이므로 $f'(t)=0$을 만족하는 t의 값이다.

스스로 하기 / 풀이

2 (1) t초 후의 물 로켓의 속도와 가속도를 각각 v, a라고 하면

$$v=20-10t$$

$$a=-10$$

따라서 $t=2$일 때 속도는 **0 m/s**, 가속도는 **-10 m/s^2**이다.

(2) 물 로켓이 최고의 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$20-10t=0$$

$$\therefore t=2$$

따라서 최고의 높이는

$20\cdot2-5\cdot2^2=$**20 (m)**

3 (1) t초 후의 기차의 속도와 가속도를 각각 v, a라고 하면

$$v=26-1.3t$$

$$a=-1.3$$

따라서 $t=2$일 때 속도는 **23.4 m/s**, 가속도는 **-1.3 m/s^2**이다.

(2) 기차가 정지했을 때의 속도는 0이므로

$$26-1.3t=0$$

$t=20$에서 걸린 시간은 **20초**이다.

따라서 움직인 거리는

$26\cdot20-0.65\cdot20^2=$**260 (m)**

중단원 확인하기 / 풀이

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
증가, 감소, 극대, 극댓값, 극소, 극솟값, 극값

2. 도함수의 활용

접선의 방정식

계산
1 다음 접선의 방정식을 구하여라.
(1) 곡선 $y=x^3-3x^2+6$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선
(2) 곡선 $y=x^4+3x^2+1$에 접하고 기울기가 10인 접선

함수의 그래프의 개형

이해
2 다음 함수의 극값을 구하고, 그래프의 개형을 그려라.
(1) $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$ (2) $y=x^4-2x^2+3$

방정식에의 활용

이해
3 방정식 $x^3-3x-2a^2=0$이 한 개의 실근을 갖기 위한 a값의 범위를 구하여라.

부등식에의 활용

문제 해결
4 부등식 $x^4\geq kx-3$이 항상 성립하도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

여행사의 이익

문제 해결
5 어떤 여행사의 한 여행 상품은 참가 인원이 50명 이상 80명 이하이며, 1인당 경비가 2백만 원이다. 50명에서 1명이 추가될 때마다 모든 사람에게 2만 원씩 할인해 준다고 한다. 여행사에서 이 상품을 제공하는 데 드는 비용은 참가 인원이 50명일 때 6천만 원이고, 1명이 추가될 때마다 32만 원이 추가된다고 한다. 여행사의 이익이 최대가 될 때, 여행 상품의 참가 인원을 구하여라.

1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+6$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(1)=3\cdot1^2-6\cdot1=-3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-3(x-1)$

즉, $\boldsymbol{y=-3x+7}$

(2) $f(x)=x^4+3x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+6x$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 10이므로

$f'(a)=4a^3+6a=10$

$(a-1)(2a^2+2a+5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $2a^2+2a+5=0$

$2a^2+2a+5$

$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

이므로 $a=1$

$f(1)=1^4+3\cdot1^2+1=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=10(x-1)$, 즉 $\boldsymbol{y=10x-5}$

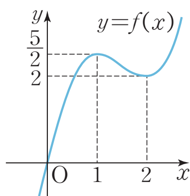
2 (1) $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x^2-3x+2)$
$=3(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{5}{2}$ 극댓값	↘	2 극솟값	↗

따라서 함수 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



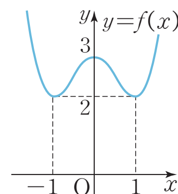
(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	2 극솟값	↗	3 극댓값	↘	2 극솟값	↗

따라서 함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



3 $f(x)=x^3-3x$로 놓으면

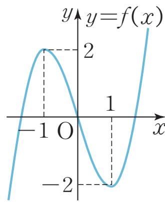
$f'(x)=3x^2-3$

$\quad\;\;=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 극댓값	↘	-2 극솟값	↗



한편 $2a^2>0$이므로 $2a^2>2$를 만족할 때, 방정식 $x^3-3x-2a^2=0$은 한 개의 실근을 가진다.

$\therefore a^2>1$

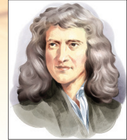
즉, $\boldsymbol{a<-1}$ **또는** $\boldsymbol{a>1}$

81

수 학 실 험 실

실근의 근삿값 구하기– 뉴턴의 방법

방정식 $f(x)=0$의 한 실근 r의 근삿값을 구하는 뉴턴의 방법을 알아보자.



뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)

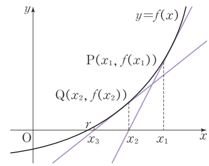
1단계 곡선 $y=f(x)$를 그려서 r 근방의 x_1을 적당히 정한다.

2단계 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$에서의 접선의 x절편을 x_2라 하고, $f'(x_1)\neq0$이라고 하면

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

3단계 곡선 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$에서의 접선의 x절편을 x_3이라고 하면

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



4단계 이 과정을 반복하여 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 을 만족시키는 수열 $\{x_n\}$을 구하면 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r$가 성립한다.

$\sqrt[6]{2}$는 방정식 $x^6-2=0$의 실근이므로 $f(x)=x^6-2$라고 하면

$$x_{n+1}=x_n-\frac{{x_n}^6-2}{6{x_n}^5}$$

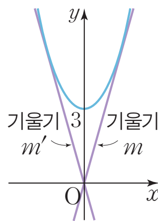
여기서 $x_1=1$로 놓고 계산기를 사용하여 $x_2,\ x_3,\ \cdots$을 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$x_2=1.166666667,\ x_3=1.126443678,\ x_4=1.122497067,$$
$$x_5=1.122462051,\ x_6=1.122462048,\ \cdots$$

따라서 $\sqrt[6]{2}\fallingdotseq1.122462048$이다.

4 $f(x)=x^4+3$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$에서 최솟값은 $x=0$일 때 3이므로 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소함수이고 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가함수이다.

한편 원점을 지나고 $y=f(x)$에 접하는 두 직선의 기울기를 각각 $m,\ m'$이라고 하면 $y=kx$는 원점을 지나는 직선이므로 오른쪽 그림과 같이 $m'\le k\le m$일 때, 주어진 조건을 만족한다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ t^4+3)$에서의 접선의 방정식 $y-(t^4+3)=4t^3(x-t)$가 원점을 지날 때 t의 값을 구하면

$-(t^4+3)=-4t^4,\quad t^4=1$

$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore m=4\cdot1^3=4,\quad m'=4\cdot(-1)^3=-4$

$m'\le k\le m$으로부터 $\quad\boldsymbol{-4\le k\le4}$

5 예약한 인원수가 $x(50\le x\le80)$명일 때, 1인당 경비는 $200-2(x-50)=-2x+300$(만 원)

여행사에서 드는 비용은

$6000+32(x-50)=32x+4400$(만 원)

이때, 여행사의 이익을 y만 원이라고 하면

$y=(-2x+300)x-(32x+4400)$

$\;\;=-2x^2+268x-4400$(만 원)

$y'=-4x+268=0$에서 $x=67$일 때, y는 최대가 되므로 **67**명이 참가했을 때, 여행사의 이익은 최대가 된다.

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.284

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

01 바탕

다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^2+2x-3$ 위의 점 $P(2,\ 5)$에서의 접선

(2) 점 $P(-1,\ 7)$에서 곡선 $y=-x^3+2$에 그은 접선

02 기본

곡선 $y=2x^3+ax^2+bx$가 점 $(1,\ -1)$을 지나고, 그 점에서의 접선의 기울기가 1일 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

03 기본

곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 $(t,\ t^2-1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 하고, 점 $(t,\ t^2-1)$에서의 접선에 수직인 방정식이 y축과 만나는 점을 Q라고 할 때, $\lim_{t\to1}\overline{PQ}$의 값은? (단, $t\neq0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

04 실력

x축 위의 한 점에서 곡선 $y=x^2+\frac{k}{4}$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

05 기본

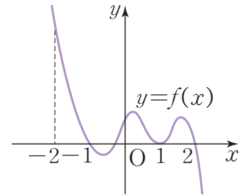
삼차함수 $f(x)=-2x^3+6x^2+ax+3$이 실수 전체의 집합에서 감소하기 위한 상수 a의 최댓값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

곡선 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

06 기본

모든 실수에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $g(x)=(x^3+1)f(x)$에 대하여 $g(x)$가 감소 상태에 있는 x의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(x)$의 증감표를 만들어 극값의 유무를 판단한다.

07 바탕

사차함수 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-3$에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 극값을 갖지 않는다.
② 극댓값 1개만을 가진다.
③ 극솟값 1개만을 가진다.
④ 극댓값 2개, 극솟값 1개를 가진다.
⑤ 극댓값 1개, 극솟값 2개를 가진다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.

08 기본

삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 서로 다른 세 실근을 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라고 할 때, 다음 중 β의 범위로 옳은 것은?

① $\beta<-1$ ② $-1<\beta<0$ ③ $0<\beta<1$
④ $1<\beta<2$ ⑤ $\beta>2$

09 기본

$x\geq0$일 때, 부등식 $x^3-12x+k>0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k<-16$ ② $k\geq-16$ ③ $k<16$
④ $k\leq16$ ⑤ $k>16$

10 기본

두 함수

$$f(x)=x^4+2x^3-4x^2+a,\ g(x)=2x^3+2x^2-8x-14$$

에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>10$ ② $a>6$ ③ $a>2$
④ $a<6$ ⑤ $a<10$

11 실력

함수 $f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)$의 최댓값은?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{2}{5}+\log_3 4$
④ $\frac{3}{2}+\log_3 2$ ⑤ $4+\log_3 6$

12 실력

걷는 속도가 일정한 사람이 가로등 바로 아래에서부터 일직선으로 걸어 나아갈 때, 그림자의 끝의 속도는?

① 사람이 걷는 시간에 비례한다.
② 사람이 걷는 시간의 제곱에 비례한다.
③ 가로등과 사람까지의 거리에 비례한다.
④ 가로등과 사람까지의 거리의 제곱에 비례한다.
⑤ 사람의 걷는 속도가 일정하므로 항상 일정하다.

13 기본

밑면의 반지름의 길이가 20 cm, 높이가 30 cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 매초 1 cm씩 길어지고 높이는 매초 3 cm씩 짧아질 때, 4초 후의 원기둥의 부피의 변화율을 구하여라.

정지한 열차의 속력은 0 m/초이다.

14 실력

직선 궤도를 a m/초의 속력으로 달리는 어떤 열차가 브레이크를 건 후 정지할 때까지 t초 동안 달린 거리를 s m라고 하면 $s=at-0.8t^2$인 관계가 성립한다고 한다. 이 지하철이 500 m 전방의 장애물을 발견하였을 때, 장애물과 충돌하기 전에 멈출 수 있기 위한 속력 a의 최댓값은?

① 30 m/초　② 35 m/초　③ 40 m/초
④ 45 m/초　⑤ 50 m/초

대단원 평가 문제



정답과 풀이 p.287

01

함수 $f(x)=-3x^2$에 대하여 $x=-1$에서 $x=a$까지의 평균변화율이 3일 때, 상수 a의 값은?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

02

곡선 $y=x^3+x-2$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(1, 0)$, $\mathrm{Q}(a,\ a^3+a-2)$를 지나는 직선의 기울기를 $g(a)$라고 할 때, $\lim_{a\to1} g(a)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

03

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$에 대하여

$$f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$

일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=3$에서 극소이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04

다음 중 다항함수 $y=(x+1)(x^2-x+1)$을 바르게 미분한 것은?

① $3x^2$　② $3x^2-1$　③ $3x^2+x$
④ $3x^2+x-1$　⑤ $3x^2-x+2$

05

$x=1$에서 미분가능한 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x\geq1) \\ 2x+b & (x<1) \end{cases}$$

로 정의할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

06

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=3, f'(1)=-1$일 때, $\lim_{x\to1} \dfrac{xf(1)-f(x^3)}{x-1}$의 값은?

① -6　② -3　③ 0
④ 3　⑤ 6

07

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가

$$x=t^3-2t^2+6$$

로 나타날 때, $t=2$에서의 점 P의 가속도는?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

08

다항식 $f(x)=x^{10}+ax+b$가 $(1-x)^5$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -90 ② -45 ③ -30
④ -20 ⑤ -15

09

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 두 조건을 만족할 때, $g'(1)$의 값은?

Ⅰ. $f'(x)=2g'(x)$
Ⅱ. $\{f(x)+g(x)\}'=x^3+x^2+1$

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

10

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값 1을 가질 때, 곡선 $y=f(x)(x-1)^2$ 위의 x좌표가 2인 점에서의 접선의 방정식은?

① $y=2x-3$ ② $y=2x-1$
③ $y=2x+1$ ④ $y=3x-1$
⑤ $y=3x$

11

이차함수 $f(x)=ax^2+bx$에서 $f'(p)=-1$, $f'(q)=2$일 때, $f(x)$의 구간 $[p,\ q]$에서의 평균변화율은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

12

방정식 $\frac{x^3}{3}-x^2-3x-a+9=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $-4<a<9$ ② $-4<a<0$
③ $-3<a<\frac{32}{3}$ ④ $0<a<9$
⑤ $0<a<\frac{32}{3}$

13

두 곡선 $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=2x^2-5x+3$이 서로 접할 때, 접점에서의 접선의 방정식은?

① $y=3x-5$　　② $y=3x-3$
③ $y=3x$　　④ $y=5x-3$
⑤ $y=5x$

14

다항식 $x^{2011}-2011x^2+px+q$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, $p-q$의 값은?

① 2011　　② 2012　　③ 2013
④ 2014　　⑤ 2015

15

함수 $f(x)=2x^3-3x^2+6kx$의 극댓값과 극솟값의 차가 27일 때, 실수 k의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

16 UP!!

함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

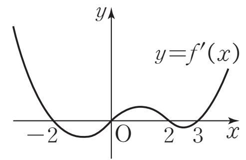
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$$

를 만족하고, $f'(0)=1$일 때, $f'(1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

17

다항함수 $y=f(x)$의 도함수의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



①　　②
③　　④
⑤

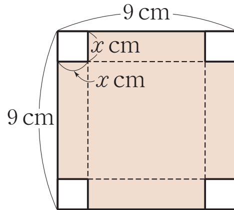
18 UP!!

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $f(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+2t$로 나타난다고 한다. 시각 t가 $0\leq t\leq 5$인 범위에 있을 때, 속력의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

19 UP!!

한 변의 길이가 9 cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고 남은 부분을 접어서 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들 때, 부피의 최댓값은?



① 16 ② 24 ③ 36
④ 54 ⑤ 72

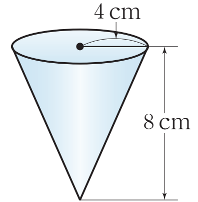
20 서술형

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^x$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(단, $a\neq 0$)

21 서술형

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4 cm, 높이가 8 cm인 직원뿔을 뒤집어 놓은 모양의 그릇에 물이 가득 차 있다. 이 그릇에 구멍을 내어 높이가 매초 1 cm씩 낮아지도록 물이 흘러나갈 때, 2초 후 물의 부피의 변화율을 구하여라.



II 다항함수의 미분법

중단원 평가 문제

▶ 1. 미분계수와 도함수 / P_73

01 $b-a=\Delta x$라고 하면 $b=a+\Delta x$이고

$b \to a$이면 $\Delta x \to 0$이므로

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=f'(a)$$

따라서 $x=a$에서의 순간변화율(미분계수)을 나타낸 것이다.

답 ③

02 ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2=2f'(a)$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)=-f'(a)$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a+h)-f(a)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2$

$\displaystyle\quad-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=2f'(a)-f'(a)=f'(a)$

ㄹ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-2h)}{4h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-2h)-f(a)\}}{4h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{1}{2}$

$\displaystyle\quad-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\displaystyle=\frac{f'(a)}{2}+\frac{f'(a)}{2}=f'(a)$

답 ⑤

03 (1) $\displaystyle f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$

(2) $y'=2x$이므로, 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$

답 (1) 4 (2) 4

04 $\frac{2}{n}=h$로 놓으면 $n=\frac{2}{h}$이고

$n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\frac{2}{n}\right)-f\left(2-\frac{2}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\{f(2+h)-f(2-h)\}$$
$$=2\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$$
$$=2\{f'(2)+f'(2)\}=4f'(2)=4\cdot 4=16$$

답 16

05 ① $x=6$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(6)>0$이다. (참)

② $f'(x)=0$인 점은 $x=2$일 때의 1개이다. (거짓)

③ $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=2$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재한다. (참)

④ 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=4$, $x=5$에서 불연속이므로 불연속인 점은 3개이다. (참)

⑤ 불연속인 점과 뾰족한 점에서는 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=1$, $x=3$, $x=4$, $x=5$의 4개이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

06 $y=x^3-3x+1$에서 $y'=3x^2-3$

미분계수가 9인 점의 x좌표를 a라고 하면

$3a^2-3=9$ $a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$

$x=2$일 때, $y=8-6+1=3$

$x=-2$일 때, $y=-8+6+1=-1$

이므로

A$(-2, -1)$, B$(2, 3)$ 또는

A$(2, 3)$, B$(-2, -1)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=4\sqrt{2}$

답 ④

07 $f(x)=x^{10}+2x^2-3$으로 놓으면

$f(1)=1+2-3=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{10}+2x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$f(x)=x^{10}+2x^2-3$에서 $f'(x)=10x^9+4x$

따라서 구하는 값은 $f'(1)=10+4=14$

답 ②

08 $f(x)=x^5+x$에서 $f'(x)=5x^4+1$

$\therefore f'(1)=5+1=6$

답 ④

09 (1) $y=(x+1)(2x-1)$에서

$y'=(x+1)'(2x-1)+(x+1)(2x-1)'$

$=1\cdot(2x-1)+(x+1)\cdot2=4x+1$

(2) $y=(x^2-1)(x^3+2)$에서

$y'=(x^2-1)'(x^3+2)+(x^2-1)(x^3+2)'$

$=2x\cdot(x^3+2)+(x^2-1)\cdot3x^2$

$=5x^4-3x^2+4x$

(3) $y=(x^2-1)(2x+1)(x+1)$에서

$y'=(x^2-1)'(2x+1)(x+1)$

$+(x^2-1)(2x+1)'(x+1)$

$+(x^2-1)(2x+1)(x+1)'$

$=2x\cdot(2x+1)(x+1)$

$+(x^2-1)\cdot2\cdot(x+1)$

$+(x^2-1)(2x+1)\cdot1$

$=8x^3+9x^2-2x-3$

(4) $y=(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$에서

$y'=24x^2-24x+6$

답 풀이 참조

10 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f'(0)=0$

이므로 $f'(0)=0$을 만족하는 함수이어야 한다.

① $f'(x)=2x$ $\therefore f'(0)=0$

② $f'(x)=2$ $\therefore f'(0)=2$

③ $f'(x)=4x-4$ $\therefore f'(0)=-4$

④ $f'(x)=3x^2-2x+2$ $\therefore f'(0)=2$

⑤ $f(x)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$이므로

$f'(x)=8x+4$ $\therefore f'(0)=4$

답 ①

11 구간 $[1, 2]$에서의 평균변화율이 1이므로

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=(4+2a+b)-(1+a+b)$

$=a+3=1$

$\therefore a=-2$ $\therefore f(x)=x^2-2x+b$

이때, $f'(x)=2x-2$이므로 $f'(2)=2$

답 ⑤

12 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$f(x)=x^8-2x+1$에서 $f'(x)=8x^7-2$

$\therefore g(2)=f'(2)=8\cdot2^7-2=2^{10}-2=1022$

답 ①

13 ㄱ. $\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(-x^2+4x)=3$

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\right)=3$

$f(1)=-1^2+4\cdot1=3$

따라서 $\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=3=f(1)$

이므로 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to+0}(2-\Delta x)=2$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{2\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \left(2+\frac{\Delta x}{2}\right)=2$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $f'(x)=\begin{cases} -2x+4 & (x \ge 1) \\ x+1 & (x<1) \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} f'(x) = 2 = f'(1)$$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두이다.

답 ⑤

▶ 2. 도함수의 활용 / P_98

01 (1) $f(x)=x^2+2x-3$으로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

이므로 점 $P(2, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2\cdot 2+2=6$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=6(x-2)$

$\therefore y=6x-7$

(2) $f(x)=-x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접점의 좌표는

$(a, -a^3+2)$

$x=a$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-3a^2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-a^3+2)=-3a^2(x-a)$

$\therefore y=-3a^2x+2a^3+2$ ······㉠

이 직선이 점 $P(-1, 7)$을 지나므로

$7=3a^2+2a^3+2$, $2a^3+3a^2-5=0$

$(a-1)(2a^2+5a+5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $2a^2+5a+5=0$

$2a^2+5a+5$

$=2\left(a+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=-3x+4$

답 (1) $y=6x-7$ (2) $y=-3x+4$

02 $f(x)=2x^3+ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

주어진 곡선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$f(1)=2+a+b=-1$ $\therefore a+b=-3$ ···㉠

또 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(1)=6+2a+b=1$ $\therefore 2a+b=-5$ ···㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore b-a=-1+2=1$

답 ⑤

03 $f(x)=x^2-1$로 놓으면 $f(x)=2x$

점 (t, t^2-1)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$, $y=2tx-t^2-1$

$\therefore P(0, -t^2-1)$

또 점 (t, t^2-1)에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-(t^2-1)=-\frac{1}{2t}(x-t)$

$y=-\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2}$

$\therefore Q\left(0, t^2-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \overline{PQ}=\left|\left(t^2-\frac{1}{2}\right)-(-t^2-1)\right|=2t^2+\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{t \to 1} \overline{PQ} = \lim_{t \to 1}\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

답 ④

04 $f(x)=x^2+\frac{k}{4}$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha \ne \beta)$라고 하면 접점의 좌표는

$\left(\alpha, \alpha^2+\frac{k}{4}\right)$, $\left(\beta, \beta^2+\frac{k}{4}\right)$

$x=\alpha$, $x=\beta$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$

따라서 두 점 $\left(\alpha, \alpha^2+\frac{k}{4}\right)$, $\left(\beta, \beta^2+\frac{k}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은 각각

$y-\left(\alpha^2+\frac{k}{4}\right)=2\alpha(x-\alpha)$

$y-\left(\beta^2+\frac{k}{4}\right)=2\beta(x-\beta)$

즉, $y=2\alpha x-\alpha^2+\frac{k}{4}$ ……㉠

$y=2\beta x-\beta^2+\frac{k}{4}$ ……㉡

두 접선이 서로 수직이므로

$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \qquad \therefore \alpha\beta=-\frac{1}{4}$

㉠, ㉡에서 두 접선의 교점의 x좌표는

$2\alpha x-\alpha^2+\frac{k}{4}=2\beta x-\beta^2+\frac{k}{4}$

$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

두 접선의 교점이 x축 위의 점이므로 교점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, 0\right)$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$0=\alpha(\alpha+\beta)-\alpha^2+\frac{k}{4}$, $0=\alpha\beta+\frac{k}{4}$

$\therefore k=-4\alpha\beta=1 \left(\because \alpha\beta=-\frac{1}{4}\right)$

답 1

05 $f(x)=-2x^3+6x^2+ax+3$에서

$f'(x)=-6x^2+12x+a$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=6^2+6a\leq 0 \qquad \therefore a\leq -6$

따라서 상수 a의 최댓값은 -6이다.

답 ①

06 $g'(x)=(x^3+1)'f(x)+(x^3+1)f'(x)$

$=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

한편 $f(a)$는 $x=a$에서의 함숫값이고, $f'(a)$는 $x=a$에서의 접선의 기울기와 같으므로 $y=f(x)$의 그래프에서 다음을 알 수 있다.

① $f(-2)>0$, $f'(-2)<0$이므로

$g'(-2)=3\cdot 4\cdot f(-2)+(-8+1)f'(-2)$

$=12f(-2)-7f'(-2)>0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 증가상태에 있다.

② $f(-1)=0$, $f'(-1)<0$이므로

$g'(-1)=3\cdot 1\cdot f(-1)+(-1+1)f'(-1)$

$=3f(-1)=0$

③ $f(0)>0$, $f'(0)>0$이므로

$g'(0)=3\cdot 0\cdot f(0)+(0+1)f'(0)$

$=f'(0)>0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 증가상태에 있다.

④ $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$g'(1)=3\cdot 1\cdot f(1)+(1+1)f'(1)$

$=3\cdot 0+2\cdot 0=0$

⑤ $f(2)=0$, $f'(2)<0$이므로

$g'(2)=3\cdot 4\cdot f(2)+(8+1)f'(2)$

$=9f'(2)<0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 감소상태에 있다.

답 ⑤

07 $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

$=4x(x^2-3x+3)=0$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$\left(\because x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\right)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3 극솟값	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -3을 가지고, 극댓값은 없다.

답 ③

08 $f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면

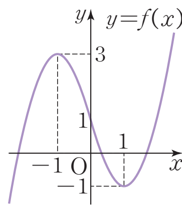
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3 극댓값	↘	-1 극솟값	↗

그런데 주어진 삼차방정식의 세 실근은 $y=x^3-3x+1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.



$\therefore \alpha<-1,\ 0<\beta<1<\gamma$

답 ③

09 $f(x)=x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

$x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

위의 증감표에 의하여 $x\ge0$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때, 극소이면서 최소이다.

따라서 주어진 부등식이 성립하기 위한 조건은

$f(2)=8-24+k>0 \quad \therefore k>16$

답 ⑤

10 함수 $f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=(x^4+2x^3-4x^2+a)-(2x^3+2x^2-8x-14)$

$\quad =x^4-6x^2+8x+a+14$

$h'(x)=4x^3-12x+8=4(x+2)(x-1)^2$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$h(-2)=(-2)^4-6\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)+a+14$

$\quad =a-10>0$

$\therefore a>10$

답 ①

11 진수조건에 의하여 $\quad 5-x>0,\ x+4>0$

$\therefore -4<x<5$

$f(x)=\frac{1}{2}\log_3(5-x)+\log_3(x+4)$

$\quad =\frac{1}{2}\log_3(5-x)(x+4)^2$

에서 밑이 1보다 크므로 진수가 최대가 될 때 $f(x)$도 최대가 된다.

$g(x)=(5-x)(x+4)^2$으로 놓으면

$g'(x)=-(x+4)^2+2(5-x)(x+4)$

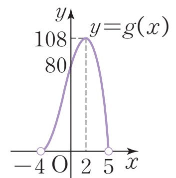
$\quad =-3(x+4)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=2$

구간 $(-4,\ 5)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	108 극댓값	↘	

따라서 구간 $(-4,\ 5)$에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이고, 최댓값은 $g(2)=108$

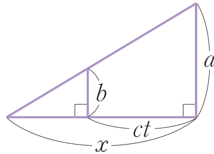


따라서 $f(x)$의 최댓값은

$$f(2)=\frac{1}{2}\log_3 108=\frac{1}{2}\log_3(3^3\cdot 2^2)$$
$$=\frac{1}{2}(3+2\log_3 2)=\frac{3}{2}+\log_3 2$$

답 ④

12 가로등의 길이를 a, 사람의 키를 b, 걷는 속도를 c, t초 후의 가로등에서 그림자 끝까지의 거리를 x라고 하면



$x-ct : b=x : a$에서 $bx=ax-act$

$\therefore x=\frac{ac}{a-b}t$ $\quad\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{ac}{a-b}$ (상수)

따라서 그림자 끝의 속도는 항상 일정하다.

답 ⑤

13 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 길어지는 속도는 1 cm/초이고, 높이가 짧아지는 속도는 3 cm/초이므로 t초 후 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라고 하면

$r=20+t$ (cm), $h=30-3t$ (cm)

원기둥의 부피를 V cm^3라고 하면

$V=\pi r^2 h=\pi(20+t)^2(30-3t)$ (cm^3)

시각 t에 대한 부피 V의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=2\pi(20+t)(30-3t)-3\pi(20+t)^2$$
$$=-9\pi t(20+t)\ (\text{cm}^3/\text{초})$$

따라서 $t=4$일 때, 원기둥의 부피의 변화율은

$-9\pi\cdot 4(20+4)=-864\pi$ (cm^3/초)

답 -864π cm^3/초

14 $s=at-0.8t^2$에서 브레이크를 건 후 t초 후의 속도를 v라고 하면

$v=\frac{ds}{dt}=a-1.6t$ (m/초)

열차가 정지할 때의 속도는 0 m/초이므로

$a-1.6t=0$ $\quad\therefore t=\frac{5}{8}a$ (초)

이때, 이 열차가 멈출 때까지 달린 거리는

$s=\frac{5}{8}a^2-\frac{5}{16}a^2=\frac{5}{16}a^2$ (m)

$s\le 500$이므로 $\frac{5}{16}a^2\le 500$에서

$0\le a\le 40$ ($\because a\ge 0$)

따라서 a의 최댓값은 40 m/s이다.

답 ③

대단원 평가 문제 p.102~105

01 $$\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=\frac{-3a^2+3}{a+1}$$
$$=\frac{-3(a+1)(a-1)}{a+1}=3$$

$a-1=-1$ $\quad\therefore a=0$

답 ①

02 $\lim_{a\to 1} g(a)$는 곡선 $y=x^3+x-2$ 위의 점 P(1, 0)에서의 접선의 기울기를 뜻한다.

$y'=3x^2+1$

$x=1$일 때, $y'=4$ $\quad\therefore \lim_{a\to 1} g(a)=4$

답 ④

03 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04 $$y'=(x+1)'(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)'$$
$$=x^2-x+1+(x+1)(2x-1)$$
$$=3x^2$$

답 ①

05 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1+0}(ax^2+1)=\lim_{x\to1-0}(2x+b)=f(1)$

$a+1=2+b \quad \therefore a-b=1$ ……㉠

또 $f'(1)$의 값이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x\ge1)\\ 2 & (x<1)\end{cases}$

에서 $\lim_{x\to1+0}2ax=\lim_{x\to1-0}2$

$2a=2 \quad \therefore a=1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $1-b=1 \quad \therefore b=0$

$\therefore a+b=1+0=1$

답 ④

06 $\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(x^3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x^3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$

$-\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\right\}$

$=f(1)-f'(1)\cdot\lim_{x\to1}(x^2+x+1)$

$=3-(-1)\cdot3=6$

답 ⑤

07 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t,\quad a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot2-4=8$

답 ②

08 $f(x)$를 $(1-x)^5$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{10}+ax+b=(1-x)^5Q(x)$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+a=-5(1-x)^4Q(x)+(1-x)^5Q'(x)$ ……㉡

㉠, ㉡의 양변에 각각 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0,\ 10+a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-10,\quad b=9 \quad \therefore ab=-90$

답 ①

09 $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$=2g'(x)+g'(x)$

$=3g'(x)=x^3+x^2+1$

$\therefore g'(x)=\frac{1}{3}(x^3+x^2+1)$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{3}(1+1+1)=1$

답 ④

10 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값 1을 가지므로

$f'(2)=0,\ f(2)=1$

$g(x)=f(x)(x-1)^2$으로 놓고 $x=2$를 대입하면

$g(2)=f(2)(2-1)^2=1\cdot1^2=1$

즉, $g(x)$의 x좌표가 2인 점의 좌표는 $(2, 1)$

$g'(x)=f'(x)(x-1)^2+f(x)\{(x-1)^2\}'$

$=f'(x)(x-1)^2+f(x)(x^2-2x+1)'$

$=f'(x)(x-1)^2+2(x-1)f(x)$

이므로 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f'(2)+2f(2)=0+2\cdot1=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2(x-2)$

$\therefore y=2x-3$

답 ①

11 $f(x)=ax^2+bx$에서 $f'(x)=2ax+b$

$f'(p)=-1$에서 $2ap+b=-1$

$f'(q)=2$에서 $2aq+b=2$

$f(x)$의 구간 $[p,\ q]$에서의 평균변화율은

$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=\frac{(aq^2+bq)-(ap^2+bp)}{q-p}$

$=\frac{a(q^2-p^2)+b(q-p)}{q-p}$

$=a(q+p)+b$

$=\frac{(2ap+b)+(2aq+b)}{2}$

$=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$

답 ②

12 $\frac{x^3}{3}-x^2-3x-a+9=0$에서

$\frac{x^3}{3}-x^2-3x+9=a$

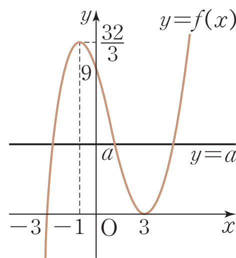
$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+9$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{32}{3}$ 극댓값	↘	0 극솟값	↗



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+9$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 a값의 범위는

$0<a<\frac{32}{3}$

답 ⑤

13 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$,

$g(x)=2x^2-5x+3$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3$, $g'(x)=4x-5$

두 곡선 $f(x)$, $g(x)$가 서로 접하므로 접점에서의 함숫값과 접선의 기울기가 같다.

접점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

$f(t)=g(t)$에서

$t^3-3t^2+3t-1=2t^2-5t+3$

$t^3-5t^2+8t-4=0$

$(t-1)(t-2)^2=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ ……㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2-6t+3=4t-5$

$3t^2-10t+8=0$

$(3t-4)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t=2$

$f(2)=g(2)=1$, $f'(2)=g'(2)=3$

이므로 접점의 좌표는 $(2, 1)$이고, 점 $(2, 1)$에서 접선의 기울기는 3이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-1=3(x-2)$ $\therefore y=3x-5$

답 ①

14 $x^{2011}-2011x^2+px+q$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^{2011}-2011x^2+px+q=(x-1)^2Q(x)$ …㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1-2011+p+q=0$

$\therefore p+q=2010$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2011x^{2010}-4022x+p$

$=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

$x=1$을 대입하면

$2011-4022+p=0$ $\therefore p=2011$

㉡에 $p=2011$을 대입하면 $q=-1$

$\therefore p-q=2011+1=2012$

답 ②

15 $f'(x)=6(x^2-x+k)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $f(x)$의 극댓값은 $f(\alpha)$, 극솟값은 $f(\beta)$이고 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=k$이다.

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4k$

$\therefore \alpha-\beta=-\sqrt{1-4k}$ $(\because \alpha<\beta)$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2k$

$\therefore f(\alpha)-f(\beta)$

$=(2\alpha^3-3\alpha^2+6k\alpha)-(2\beta^3-3\beta^2+6k\beta)$

$=2(\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2-\beta^2)+6k(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)+6k\}$

$=-\sqrt{1-4k}\{2(1-k)-3+6k\}$

$=-\sqrt{1-4k}\,(4k-1)=27$

따라서 $(1-4k)^{\frac{3}{2}}=27$이므로 $\quad k=-2$

답 ①

16 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+3h-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+3\right\}$$

$$=1+3 \ (\because ㉠)$$

$$=4$$

답 ④

17 주어진 그림에서 $f'(x)=0$인 점의 x좌표는 -2, 0, 2, 3이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

위의 표를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-2$, $x=2$에서 극대이고 $x=0$, $x=3$에서 극소이어야 하므로 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

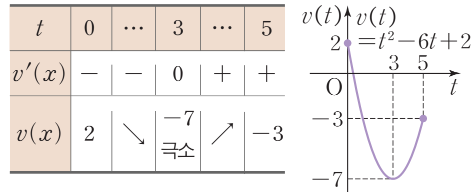
18 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=f'(t)=t^2-6t+2$

$v'(t)=2t-6$이므로

$v'(t)=0$에서 $\qquad t=3$

구간 $[0, 5]$에서 $v(t)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.



t	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$v'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$v(x)$	2	↘	-7 극소	↗	-3

따라서 함수 $v(t)$는 $t=3$에서 극소이므로 극솟값은 $\qquad v(3)=-7$

주어진 구간의 양 끝점에서의 함숫값은

$v(0)=2$, $v(5)=-3$

따라서 점 P의 속력 $|v(t)|$의 최댓값은

$|v(3)|=7$

답 ⑤

19 잘라 내는 정사각형 한 변의 길이가 x cm이므로 상자의 밑면의 한 변의 길이는 $\qquad (9-2x)$ cm

$x>0$, $9-2x>0$이므로 $\qquad 0<x<\frac{9}{2}$

상자의 부피를 $f(x)$라고 하면

$f(x)=x(9-2x)^2=4x^3-36x^2+81x$

$f'(x)=12x^2-72x+81$

$\quad=3(4x^2-24x+27)$

$\quad=3(2x-3)(2x-9)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\qquad x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

구간 $0<x<\frac{9}{2}$에서 $f'(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	54 극댓값	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 54를 가진다.

따라서 상자의 부피의 최댓값은 54 cm^3이다.

답 ④

20 1단계 **접점 (t, te^t)에서의 접선의 방정식을 구한다.**

$y'=e^x(x+1)$이므로 접점의 좌표를 (t, te^t)이라고 하면 접선의 기울기는 $e^t(t+1)$이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-te^t=e^t(t+1)(x-t)$

2단계 t에 대한 방정식을 구한다.

이 접선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-te^t=e^t(t+1)(a-t),\quad e^t(t^2-at-a)=0$

$\therefore t^2-at-a=0\ (\because e^t>0)$

3단계 a의 값을 구한다.

오직 하나의 접선만 존재하므로 이차방정식 $t^2-at-a=0$이 중근을 가져야 한다.

$D=a^2+4a=0$에서 $\quad a(a+4)=0$

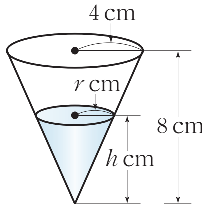
$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$

그런데 $a\neq0$이므로 $\quad a=-4$

답 -4

21 1단계 높이와 반지름의 길이 사이의 관계식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직원뿔 모양의 그릇에 담긴 물의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면



$4:8=r:h$에서

$r=\frac{h}{2}$ (cm)

2단계 부피에 관한 식을 구하고 미분을 한다.

물의 부피를 V라고 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{4}\cdot h=\frac{\pi}{12}h^3$

t초 후 물의 높이는 $h=8-t$이므로

$V=\frac{\pi}{12}(8-t)^3$

$=\frac{\pi}{12}(512-192t+24t^2-t^3)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}(-192+48t-3t^2)$

3단계 물의 부피의 변화율을 구한다.

$t=2$일 때, 물의 부피의 변화율은

$\therefore \frac{dV}{dt}=-16\pi+8\pi-\pi=-9\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$

답 $-9\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$



III 다항함수의 적분법

중단원 평가 문제

▶ 1. 부정적분과 정적분 / P_132

01 $F'(x)=2x$이므로 $F(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$

$F(1)=2$이므로 $\quad F(1)=1^2+C=2$

$\therefore C=1 \quad \therefore F(x)=x^2+1$

답 $F(x)=x^2+1$

02 (1) $\int(x-1)\left(3x+\frac{5}{3}\right)dx$

$=\int\left(3x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)dx$

$=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+C$

(2) $\int y(y+1)(y+2)dy=\int(y^3+3y^2+2y)dy$

$=\frac{1}{4}y^4+y^3+y^2+C$

(3) $\int(x-1)(x+1)(x^2+1)dx$

$=\int(x^2-1)(x^2+1)dx$

$=\int(x^4-1)dx=\frac{1}{5}x^5-x+C$

답 (1) $x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+C$ (2) $\frac{1}{4}y^4+y^3+y^2+C$ (3) $\frac{1}{5}x^5-x+C$

03 $\int(x+y)^3dy-\int(x-y)^3dy$

$=\int\{(x+y)^3-(x-y)^3\}dy$

$=\int(6x^2y+2y^3)dy=3x^2y^2+\frac{1}{2}y^4+C$

답 $3x^2y^2+\frac{1}{2}y^4+C$

04 $f'(x)=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

$f(1)=0$이므로 $f(1)=2+C=0 \quad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=x^2+x-2$

$\therefore f(-2)=0$

답 ③

III 다항함수의 적분법

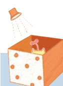
1 부정적분과 정적분　　2 정적분의 활용



컴퓨터 단층 촬영기

컴퓨터 단층 촬영기(CT)는 신체의 단면을 촬영하여 그 내부 구조를 파악하고, 종양의 크기와 위치를 알아보는 의료기이다. 이처럼 의학에서도 인체를 세분하여 촬영하고 그것을 다시 종합하여 전체를 파악하는 적분적인 개념을 활용한다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶ **고등학교 수학**
- 함수와 그 그래프
- 부등식

▶ **수학 I**
- 수열의 극한



이번에 배울 내용

- 부정적분
- 정적분
- 정적분의 활용



다음에 배울 내용

▶ **미적분과 통계 기본**
- 연속확률분포

이 단원의 학습 목표

1. 부정적분의 뜻을 안다.
2. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
3. 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
4. 정적분의 뜻을 안다.
5. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
6. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
7. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

단원을 시작하기 전에 …

방정식의 풀이 **1** 다음 방정식을 풀어라.

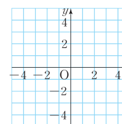
(1) $x^2-x-2=0$ (2) $x^3=x^2+4x-4$

함수의 그래프 **2** 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=|x+2|$

(2) $y=-x^2+x+2$

(3) $y=x^3-3x^2+2x$



수열의 합 **3** 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k$ (2) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (4) $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$

무한수열의 극한 **4** 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+10}{n+1}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

도함수 **5** 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=4$ (2) $y=x^2-x-3$

(3) $y=x^3+5x^2-2$ (4) $y=x^4-x^2$

단원을 시작하기 전에 ····················• 풀이

1 (1) $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ **$x=-1$ 또는 $x=2$**

(2) $x^3=x^2+4x-4$에서

$x^3-x^2-4x+4=0$

$f(x)=x^3-x^2-4x+4$로 놓으면

$f(1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다.

그러므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

1	1	−1	−4	4
		1	0	−4
	1	0	−4	0

$f(x)=(x-1)(x^2-4)$이므로 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4)=0$

$(x-1)(x-2)(x+2)=0$

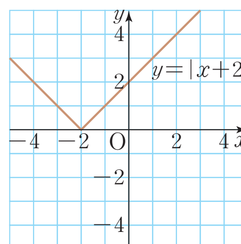
$\therefore$ **$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$**

2 (1) $x\geq-2$일 때, $y=x+2$

$x<-2$일 때, $y=-x-2$

$\therefore y=\begin{cases} x+2 & (x\geq-2) \\ -x-2 & (x<-2) \end{cases}$

따라서 함수 $y=|x+2|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



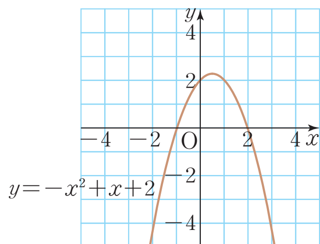
(2) $y=-x^2+x+2$

$=-(x^2-x)+2$

$=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+2$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

따라서 함수 $y=-x^2+x+2$의 그래프는 다음 그림과 같다.

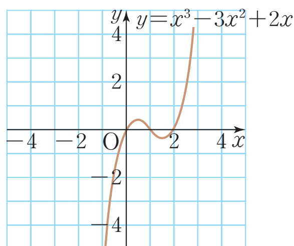


(3) $y=x^3-3x^2+2x$

$=x(x^2-3x+2)$

$=x(x-1)(x-2)$

따라서 함수 $y=x^3-3x^2+2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



3 (1) $\sum_{k=1}^{n}k=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1}2k=2\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=2\times\frac{(n-1)n}{2}=\boldsymbol{n(n-1)}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n\{2(n-1)+1\}}{6}$

$=\boldsymbol{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}$

4 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+10}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\boldsymbol{6}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$

$=\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

5 (1) $\boldsymbol{y'=0}$

(2) $\boldsymbol{y'=2x-1}$

(3) $\boldsymbol{y'=3x^2+10x}$

(4) $\boldsymbol{y'=4x^3-2x}$

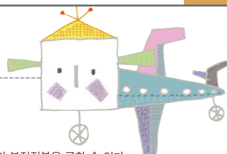
1 부정적분과 정적분

이 단원을 배우면

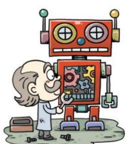
• 부정적분의 뜻을 알 수 있다.
• 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
• 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
• 정적분의 뜻을 알 수 있다.
• 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

1 부정적분

학습 목표
- 부정적분의 뜻을 안다.
- x^n의 부정적분을 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.



다 가 서 기 / **분해와 조립**



로봇을 만들려면 필요한 부품을 준비하여 순서에 맞게 조립하여야 한다. 로봇을 조립하다가 중간에 잘못되면 다시 분해해야 하며, 이때 분해는 조립의 역순으로 해야 한다.

한편 지난 2008년 방화로 소실되었던 숭례문은 한국전쟁 당시에도 폭탄에 의하여 석축과 지붕이 훼손되어 1961년 대규모의 해체 및 복원 공사가 진행된 바 있다.

이처럼 훼손된 문화재를 복원할 때에도 각 부분을 분해하여 수리하고 이를 다시 조립한다. 이때, 조립은 분해의 역순으로 이루어진다.

이와 같은 분해와 조립의 관계는 미분과 적분에서도 찾아볼 수 있다.



소단원의 학습 목표

1. 부정적분의 뜻을 안다.
2. x^n의 부정적분을 구할 수 있다.
3. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

부정적분, 원시함수, $\int f(x)dx$, **피적분함수, 적분상수**

다가서기 /

수학자 드모르간(De Morgan, A. ; 1806~1871)이 '적분은 미분의 회상' 이라는 말을 했다고 하듯이 미분과 적분 사이의 관계는 덧셈과 뺄셈, 인수분해와 전개 등의 관계와 마찬가지로 역연산의 관계이다.

참고 | 배로

런던에서 태어난 배로(Barrow, I. ; 1630~1677)는 케임브리지 대학교에서 교육을 마쳤으며 그리스 어에 가장 능숙한 사람 중의 한 사람으로 명성을 얻었다. 파리, 이탈리아, 콘스탄티노플에서 고전을 연구하고 1659년 귀국하여 사제가 되었으며, 1660년 케임브리지 대학교의 그리스 어 교수로 임명되었다. 그는 수학, 물리, 천문학, 신학에 걸쳐 두루 인정을 받은 매우 학구적인 사람이었다. 1663년 수학의 루커스 교수직이 신설되자 초대 교수가 되었으며 여기서 행한 광학과 기하학의 강의로 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)에게 영향을 주었고, 1669년 위대한 제자 뉴턴에게 교수직을 물려주었다.

배로의 가장 중요한 수학적 업적은 그의 저서 "기하학 강의"인데, 이 책에서 현대 미분 과정과 매우 비슷한 접근 방법이 나온다. 특히 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)의 접선법을 발전시키고 미분과 적분이 서로 역관계에 있다는 것을 증명하여 미적분학의 기초를 닦은 것으로서 유명하다. 배로는 일반적으로 미분법과 적분법이 역연산이라는 사실을 최초로 깨달은 사람이라고 일컬어진다.

탐구하기 / 풀이

$(x^3)'=3x^2$

$(x^4)'=4x^3$

$(x^6)'=6x^5$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음과 같다.

$F(x)$	x	x^2	x^3	x^4
$F'(x)=f(x)$	1	$2x$	$\mathbf{3x^2}$	$\mathbf{4x^3}$
$F(x)$	x^5	$\mathbf{x^6}$	$\cdots$	$\mathbf{x^n}$
$F'(x)=f(x)$	$5x^4$	$6x^5$	$\cdots$	nx^{n-1}

01 부정적분

탐구하기 / 도함수 구하기

다음 표는 함수 $F(x)=x^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5		$\cdots$	
$F'(x)=f(x)$	1	$2x$			$5x^4$	$6x^5$	$\cdots$	nx^{n-1}

알아보기 / 부정적분의 뜻을 알아보자.

함수 $f(x)$를 미분하면 도함수 $f'(x)$를 얻는다. 이제 미분한 결과가 $f(x)$가 되는 함수에 대하여 알아보자.

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

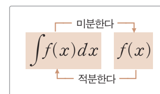
일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 **원시함수**라 하고, 기호로

$$\int f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

이때, 함수 $f(x)$를 **피적분함수**라고 한다.

또 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.



부정적분(不定積分)을 영어로 indefinite integral이라고 한다.

기호 $\int f(x)dx$를 '$f(x)$의 부정적분' 또는 '인티그럴 $f(x)dx$' 라고 읽는다.

| 보기 | 다음과 같이 세 함수 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$와 그 도함수를 생각해 보자.

$F(x)=x^3+x$ ➡ $F'(x)=3x^2+1$

$G(x)=x^3+x+1$ ➡ $G'(x)=3x^2+1$

$H(x)=x^3+x-3$ ➡ $H'(x)=3x^2+1$

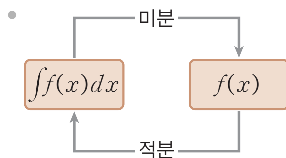
여기서 x^3+x, x^3+x+1, x^3+x-3은 모두 함수

$$f(x)=3x^2+1$$

의 부정적분임을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

•



위의 그림과 같이 미분과 적분은 역연산 관계이다.

• 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라고 하는 것은 $F'(x)=f(x)$일 때이다.

따라서 어떤 주어진 함수 $f(x)$의 부정적분은 여러 개 있다. 이를테면

$$F(x)=x^3+2,\ G(x)=x^3+5$$

에 대하여 $F'(x)=3x^2$, $G'(x)=3x^2$이므로 $F(x)$와 $G(x)$는 모두 $f(x)=3x^2$의 부정적분이다.

여기서

$G(x)-F(x)=(x^3+5)-(x^3+2)=3$

으로 $G(x)$와 $F(x)$는 상수만큼의 차이가 있다.

• $\int x^0dx=\int 1dx$는 간단히 $\int dx$로 나타낸다.

• 부정적분을 구한 다음에는 그것을 다시 미분하여 검산을 해야 한다. 이를테면

(1) $\int 3x^2dx=x^3+C$에서

$(x^3+C)'=3x^2$

(2) $\int 4x^3dx=x^4+C$에서

$(x^4+C)'=4x^3$

일반적으로 함수 $F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나이고, $G(x)$가 $f(x)$의 또 다른 부정적분이면

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)$$

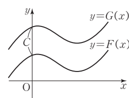
이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$$G(x)-F(x)=C\ (C는\ 상수)$$

즉, $G(x)=F(x)+C$



따라서 $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x)+C$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때, 상수 C를 **적분상수**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때

$$\int f(x)dx=F(x)+C\ (단,\ C는\ 적분상수)$$

적분하는 것은 미분하는 것의 역연산이다.

$\int 1dx$는 간단히 $\int dx$로 나타낸다.

| 보기 | (1) $\frac{d}{dx}x=1$이므로 $\int 1dx=x+C$

(2) $\frac{d}{dx}x^2=2x$이므로 $\int 2x\,dx=x^2+C$

스스로 하기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 73쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3x^2dx$ (2) $\int 5x^4dx$

2 다음 등식을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=3x+C$ (2) $\int f(x)dx=3x^2+4x+C$

(3) $\int f(x)dx=x^3-2x^2+C$ (4) $\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x+C$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$

이므로

$\int 3x^2dx=\boldsymbol{x^3+C}$

(2) $\frac{d}{dx}x^5=5x^4$

이므로

$\int 5x^4dx=\boldsymbol{x^5+C}$

2 (1) $(3x+C)'=3$

이므로

$f(x)=\boldsymbol{3}$

(2) $(3x^2+4x+C)'=6x+4$

이므로

$f(x)=\boldsymbol{6x+4}$

(3) $(x^3-2x^2+C)'=3x^2-4x$

이므로

$f(x)=\boldsymbol{3x^2-4x}$

(4) $\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x+C\right)'$

$=x^3+x^2+2$

이므로

$f(x)=\boldsymbol{x^3+x^2+2}$

보충 학습

함수 $f(x)$를 먼저 적분한 후 미분한 결과와 먼저 미분한 후 적분한 결과는 서로 같을까?

결론은 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx\neq\int\frac{d}{dx}f(x)dx$이다.

예를 들어 $f(x)=x^2$이라고 하면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int x^2dx$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)$$
$$=x^2$$

$$\int\frac{d}{dx}f(x)dx=\int\frac{d}{dx}x^2\,dx$$
$$=\int 2x\,dx$$
$$=x^2+C$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int f(x)dx=x^2\neq x^2+C=\int\frac{d}{dx}f(x)dx$$

89

02 x^n의 부정적분

탐 구 하 기 / 도함수

다음 표는 함수 $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$과 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$		$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$F'(x)=f(x)$	1	x			x^4	$\cdots$	

알 아 보 기 / x^n의 부정적분을 구하여 보자.

x를 미분하면 1, $\frac{1}{2}x^2$을 미분하면 x, $\frac{1}{3}x^3$을 미분하면 x^2이다.

일반적으로 n이 음이 아닌 정수일 때

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$$

이 성립하므로 x^n의 부정적분은 다음과 같다.

x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$x^0=1$로 생각한다. 즉, $n=0$일 때 $\int x^0 dx=\int 1dx$ $=x+C$

| **보기** | (1) $\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\int x^2 dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\frac{1}{3}x^3+C$

스 스 로 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 73쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^3 dx$ (2) $\int x^4 dx$ (3) $\int x^6 dx$

탐구하기 / 풀이

$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

$\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$

$\left(\frac{1}{5}x^5\right)'=x^4$

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$

따라서 빈칸에 알맞은 것을 써넣으면 다음과 같다.

$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$
$F'(x)=f(x)$	1	x	$\mathbf{x^2}$	$\mathbf{x^3}$
$F(x)$	$\mathbf{\frac{1}{5}x^5}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	
$F'(x)=f(x)$	x^4	$\cdots$	$\mathbf{x^n}$	

알아보기 / 해설

n이 음이 아닌 정수일 때,

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$이므로

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int x^3 dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\mathbf{\frac{1}{4}x^4+C}$

(2) $\int x^4 dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\mathbf{\frac{1}{5}x^5+C}$

(3) $\int x^6 dx=\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C=\mathbf{\frac{1}{7}x^7+C}$



Plus 문제

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^{11} dx$ (2) $\int t^3 dt$ (3) $\int y^5 dy$

| 풀이 |

(1) $\int x^{11} dx=\frac{1}{11+1}x^{11+1}+C=\mathbf{\frac{1}{12}x^{12}+C}$

(2) $\int t^3 dt=\frac{1}{3+1}t^{3+1}+C=\mathbf{\frac{1}{4}t^4+C}$

(3) $\int y^5 dy=\frac{1}{5+1}y^{5+1}+C=\mathbf{\frac{1}{6}y^6+C}$

90

03 부정적분의 성질

알 아 보 기 / 미분법의 공식을 이용하여 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분의 성질을 알아보자.

특별한 언급이 없는 한 여기서 다루는 함수는 다항함수로 생각한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$$F(x)=\int f(x)dx,\ F'(x)=f(x)$$

$$G(x)=\int g(x)dx,\ G'(x)=g(x)$$

가 성립한다.

$y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$

[1] k를 상수라고 하면 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$kF(x)=\int kf(x)dx$$

이때, $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

$y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

[2] $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$F(x)+G(x)=\int \{f(x)+g(x)\}dx$$

이때, $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

[3] $\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$$F(x)-G(x)=\int \{f(x)-g(x)\}dx$$

이때, $F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같은 부정적분의 성질을 얻는다.

부정적분의 성질

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

[1] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

부정적분의 성질 [2], [3]은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

알아보기 / 해설

• 부정적분의 성질과 관련된 각 등식에서는 각 변의 적분상수를 적절히 정할 수 있을 때, 그 등식이 성립한다는 것을 의미한다.

• 부정적분의 성질 [1]에서 $k=0$인 경우에는 다음을 얻는다.

$$(\text{좌변})=\int 0f(x)dx=\int 0\,dx=C$$

$$(\text{우변})=0\int f(x)dx=0$$

여기서 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있으므로 $k=0$일 때, 부정적분의 성질 [1]이 성립한다.

또 부정적분의 성질 [3]에서도

$f(x)=g(x)$인 경우에는

$$(\text{좌변})=\int \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int 0\,dx=C$$

$$(\text{우변})=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

$$=C_1-C_2$$

로 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있다.

따라서 $f(x)=g(x)$일 때, 부정적분의 성질 [3]이 성립한다.

보충 학습

부정적분의 성질을 일반화하면 다음과 같다.

다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$$\int \{kf(x)+lg(x)+mh(x)\}dx$$

$$=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx+m\int h(x)dx$$

(단, k, l, m은 상수)

증명_ 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$라고 하면

$\{kF(x)+lG(x)+mH(x)\}'$

$=kF'(x)+lG'(x)+mH'(x)$

$=kf(x)+lg(x)+mh(x)$

$\therefore \int \{kf(x)+lg(x)+mh(x)\}dx$

$=kF(x)+lG(x)+mH(x)$

$=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx+m\int h(x)dx$

함께하기 / 해설

1 (2) $\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$를 계산할 때, 적분상수를 여러 개 사용하여

$\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(2x+C_3)$

과 같이 나타낼 수도 있지만 다음과 같이 계산 과정 중에는 적분상수를 생략하고 하나의 적분상수 C를 써서

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

로 나타낸다.

일반적으로 적분상수는 마지막에 하나만 나타낸다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int(6x^2+2x-3)dx$

$=6\int x^2\,dx+2\int x\,dx-\int 3dx$

$=6\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)-(3x+C_3)$

$=2x^3+x^2-3x+(6C_1+2C_2-C_3)$

여기서 $6C_1+2C_2-C_3$을 C로 놓으면

$\int(6x^2+2x-3)dx$

$=\mathbf{2x^3+x^2-3x+C}$

(2) $\int(x-1)(2x+1)dx$

$=\int(2x^2-x-1)dx$

$=2\int x^2\,dx-\int x\,dx-\int 1\,dx$

$=\mathbf{\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C}$

2 $F'(x)=-3x^2+4x-2$이므로

$F(x)=\int(-3x^2+4x-2)dx$

$=-3\int x^2\,dx+4\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=-x^3+2x^2-2x+C$

$F(1)=0$이므로

$F(1)=-1+2-2+C=0$

$\therefore C=1$

$\therefore \mathbf{F(x)=-x^3+2x^2-2x+1}$

함 께 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 73쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx$　　(2) $\int(x+1)(x-2)dx$

풀이

(1) $\int(5x^2-2x+1)dx=5\int x^2\,dx-2\int x\,dx+\int 1\,dx$

$=5\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)-2\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+(x+C_3)$

$=\frac{5}{3}x^3-x^2+x+(5C_1-2C_2+C_3)$

여기서 $5C_1-2C_2+C_3$을 C로 놓으면

$\int(5x^2-2x+1)dx=\mathbf{\frac{5}{3}x^3-x^2+x+C}$

(2) $\int(x+1)(x-2)dx=\int(x^2-x-2)dx$

$=\int x^2\,dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=\mathbf{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C}$

적분상수가 여러 개 있는 경우에는 이들을 묶어서 마지막에 적분상수 C 하나로만 나타낸다.

2 $F'(x)=2x+3$, $F(0)=2$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

풀이

$F'(x)=2x+3$이므로　$F(x)=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

$F(0)=2$이므로　$F(0)=0^2+0+C=2$, 즉 $C=2$

$\therefore \mathbf{F(x)=x^2+3x+2}$

$F(0)=2$로부터 적분상수 C의 값을 구할 수 있다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 71쪽 | 익힘책 73쪽 | 익힘책 74쪽

1 다음 부정적분을 구하여라.

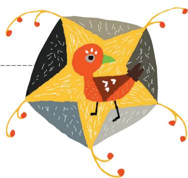
(1) $\int(6x^2+2x-3)dx$　　(2) $\int(x-1)(2x+1)dx$

2 다음 조건을 만족시키는 함수 $F(x)$를 구하여라.

$F'(x)=-3x^2+4x-2$, $F(1)=0$

1 부정적분과 정적분

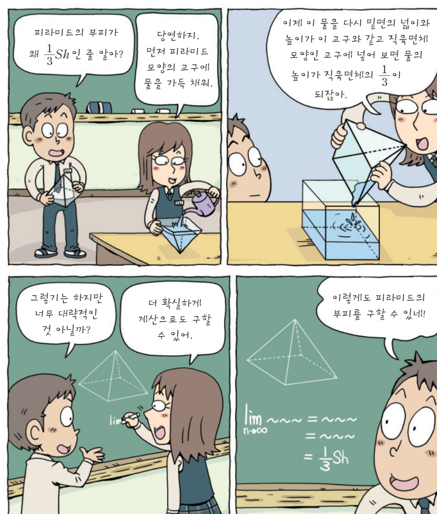
2 정적분



학습 목표

- 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 안다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

다 가 서 기 / **피라미드의 부피**



여러 가지 평면도형의 넓이나 입체도형의 부피는 그 모양을 변형하여 구할 수 있다. 이렇게 모양을 변형하면 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이도 자유롭게 구할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
2. 정적분의 뜻을 안다.
3. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

구분구적법, 정적분, $\int_a^b f(x)dx$, 아래끝, 위끝, $\Big[F(x)\Big]_a^b$, 정적분의 기본 정리

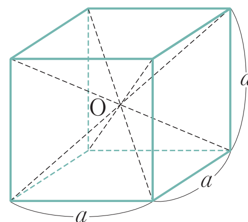
다가서기 / 해설

각종 도형의 공식에 대하여 그 공식이 유도되는 과정은 잘 모르는 경우가 있다. 예를 들어 밑넓이가 S, 높이가 h인 뿔의 부피가 $V=\frac{1}{3}Sh$인 것은 중학교에서부터 사용하고 있으나 그 원리를 모르는 경우가 대부분이다. 이 단원에서 배우는 구분구적법과 정적분을 이용하면 그 원리를 이해할 수 있다.

참고 | 피라미드의 부피

밑넓이와 높이가 같은 피라미드(사각뿔)와 사각기둥이 있을 때, 피라미드의 부피가 이 사각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이라는 것은 교구를 이용한 실험으로 확인할 수 있다. 하지만 이 방법은 증명이라기보다는 하나의 예에 지나지 않는다. 좀 더 나은 설명은 없을까?

특수한 경우 다음과 같이 설명하는 방법이 있다.



오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정육면체의 중심 O와 각 꼭짓점을 이으면 서로 합동인 6개의 사각뿔이 생긴다.

정육면체의 부피는 a^3이므로 각 사각뿔의 부피 V는 $V=\frac{1}{6}a^3$이고, 이 사각뿔의 밑넓이를 S, 높이를 h라고 하면 $\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{3}a^2\left(\frac{1}{2}a\right)$이고 $S=a^2$, $h=\frac{1}{2}a$이므로 $V=\frac{1}{3}Sh$가 된다. 이때, 밑넓이가 S이고 높이가 h인 사각기둥의 부피는 Sh이므로 밑넓이가 S이고 높이가 h인 피라미드와 사각기둥에 대하여 피라미드의 부피는 사각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이다.

01 구분구적법

탐구하기 / 제주도의 넓이



제주도의 넓이를 구하기 위하여 아래 그림과 같이 제주도의 축도 위에 한 변의 길이가 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm인 정사각형 모눈을 그렸다.





| 그림1 |



| 그림2 |



| 그림3 |

다음 물음에 답하여 보자.

1. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형의 개수를 a, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형의 개수를 b라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a			72
b			120

2. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S, 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 T라 하고, 오른쪽 표를 완성하여라.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S			4.5
T			7.5
$T-S$			3

3. 모눈의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, …와 같이 점점 작게 할 때, $T-S$의 값은 어떻게 변할지 추측하여라.

탐구하기 / 풀이

1. 각 그림에서 제주도 안에 완전히 포함된 정사각형의 개수와 제주도와 공통 부분을 가지는 정사각형의 개수를 조사하여 표를 완성하면 다음과 같다.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a	1	13	72
b	13	36	120

2. | **그림1** | 의 한 변의 길이가 1 cm이므로

$S=1\times1\times1=1$

$T=1\times1\times13=13$

$T-S=13-1=12$

| **그림2** | 의 한 변의 길이가 0.5 cm이므로

$S=0.5\times0.5\times13=3.25$

$T=0.5\times0.5\times36=9$

$T-S=9-3.25=5.75$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S	1	3.25	4.5
T	13	9	7.5
$T-S$	12	5.75	3

3. 물음 **2**의 표에서 | **그림1** |, | **그림2** |, | **그림3** |으로 갈수록 모눈의 한 변의 길이는 작아지고, $T-S$의 값도 점점 작아진다.

따라서 모눈의 한 변의 길이를 점점 작게 할 때, **$T-S$의 값은 점점 작아지고 0에 가까워진다.**

보충 학습

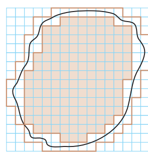
탐구하기와 같이 도형의 넓이를 모눈을 이용하여 구할 때, 도형 안에 완전히 포함된 정사각형들의 넓이의 합을 S_1, 도형의 경계와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합을 S_2라고 하면 도형의 넓이 S'은 $S'=S_1+\frac{1}{2}S_2$와 같이 구한다. 이를 이용하여 탐구하기에 주어진 제주도의 넓이를 구하여 보자.

탐구하기에서 도형 안에 포함된 정사각형들의 넓이 S_1은 물음 **2**의 S이고, 도형의 경계와 공통 부분을 가지는 정사각형들의 넓이의 합 S_2는 물음 **2**의 $T-S$이므로 각 그림에서 제주도의 넓이를 구하면 다음 표와 같다.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
S_1	1	3.25	4.5
S_2	12	5.75	3
S'	7	6.125	6

94

알 아 보 기 / 구분구적법에 대하여 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기 위하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형 모눈을 그려 보자.

주어진 도형의 넓이를 S라 하고, 도형의 안쪽에 완전히 포함된 정사각형의 넓이의 합을 S_n, 도형과 공통 부분을 가지는 정사각형의 넓이의 합을 T_n이라고 할 때

$$S_n < S < T_n$$

여기서 모눈의 크기를 충분히 작게 하면, 즉 n을 한없이 크게 하면 S_n과 T_n은 S에 한없이 가까워진다.

다각형은 몇 개의 삼각형이나 사각형으로 나누어 그 넓이를 구할 수 있다. 그러나 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형은 그와 같은 방법으로 구하기 어려우므로 극한의 개념을 이용한 구분구적법을 이용한다.

이와 같이 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 넓이 또는 부피를 알고 있는 기본 도형으로 세분하여 근삿값을 구한 뒤에 이 근삿값의 극한값으로 그 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

이제 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

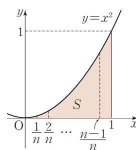
$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$$

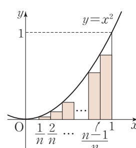
이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 차례로

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

이다. 이때, | 그림1 | 에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$





| 그림1 |

알아보기 / 해설

구분구적법은 어떤 도형을 몇 개의 작은 도형으로 나누어 나누어진 도형들의 넓이나 부피의 합을 구하고, 나누어진 도형들을 한없이 작게 하여 합의 극한값을 계산하여 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법이다.

따라서 다음과 같이 구분구적법에 의하여 도형의 넓이나 부피를 구한다.

(1) 주어진 도형을 충분히 작은 n개의 기본 도형으로 세분한 다음 이 기본 도형들의 넓이 또는 부피의 합 S_n을 구한다.

(2) (1)에서 구한 근삿값 S_n의 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하여 구하려는 도형의 넓이 또는 부피 S를 구한다.

보충 학습

구분구적법으로 도형의 넓이를 구할 때, 반드시 소구간의 끝 점에서 함숫값을 생각할 필요는 없다. 즉, 다음과 같은 방법으로 접근하여도 된다.

함수 $y=f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하자.

또 구간 $[a,\ b]$를 n개의 소구간으로 등분하고, 그 등분점을

$$a_0=a, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n=b$$

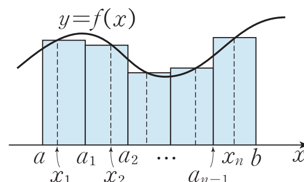
라고 하자. 또 이러한 소구간의 길이를 h라고 하면

$$h=\frac{1}{n}(b-a)$$

이다. 소구간 $[a_{k-1},\ a_k]$의 임의의 값 x_i에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)h$$
$$=f(x_1)h+f(x_2)h+\cdots+f(x_n)h \qquad \cdots\cdots ㉠$$

를 생각하면 $f(x)\geq 0$일 때, ㉠은 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 된다.



참고 | 구분구적법에 많이 사용하는 공식

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

알아보기 / 해설

일반적으로 곡선으로 둘러싸인 도형에서 도형 내부로부터의 넓이의 근삿값 S_n과 도형 외부로부터의 넓이의 근삿값 T_n은 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n$$

이 극한값이 바로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S이다.

즉, 함수 $f(x)$가 연속이면 S_n의 극한값과 T_n의 극한값이 같음이 알려져 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 각 구간의 길이는 $\frac{1}{n}$이므로 양 끝 점과 각 분점의 좌표는 차례대로

$$\mathbf{0},\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\ \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}},\ \cdots,\ \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\ \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}(=\mathbf{1})$$

(2) $y=x^3$의 x 대신에 (1)에서 구한 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 각각 대입하면 y좌표는 차례대로

$$\mathbf{0},\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^3,\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^3,\cdots,\left(\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^3,\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}\right)^3(=\mathbf{1})$$

(3) 주어진 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형들의 넓이의 합이므로

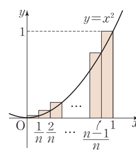
$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{n^4}\{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\}$$
$$=\frac{1}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}$$

(4) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

95

또 | 그림2 |에서 색칠한 부분의 넓이를 T_n이라고 하면

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$



| 그림2 |

구하는 넓이 S에 대하여 $S_n<S<T_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n\le S\le\lim_{n\to\infty}T_n$$

이 성립한다. 한편

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $S=\frac{1}{3}$이다.

| **참고** | 함수 $y=x^2$과 같이 연속함수인 경우에는 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한이 반드시 존재하고, 그 값이 같으므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 하나만 구하면 된다.

스스로 하기 / 익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

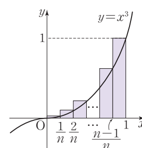
1 곡선 $y=x^3$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로 구하여라.

(2) (1)에서 구한 x좌표에 대응하는 곡선의 y좌표를 차례로 구하여라.

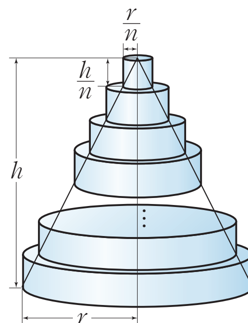
(3) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

(4) 구하는 도형의 넓이 S를 구하여라.



함께하기 / 해설

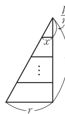
1 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른 후 n개의 원기둥을 만든다.



이때, 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$이고 n개의 원기둥

함 께 하 기 /

익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽



$x : r = \frac{h}{n} : h$

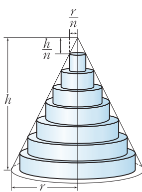
$\therefore x = \frac{r}{n}$

같은 방법으로 각 원기둥의 반지름의 길이를 구할 수 있다.

1 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피 V를 구분구적법으로 구하여라.

풀이

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하는 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른다.



이때, 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로

$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$

각 단면을 밑면으로 하고 $\frac{h}{n}$를 높이로 하는 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 원뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

루브르 박물관
프랑스 파리에 있는 세계적인 박물관으로 1793년에 설립되었다.

2 루브르 박물관은 오른쪽 그림과 같이 입구가 거대한 유리 피라미드로 되어 있다. 이 피라미드의 밑넓이가 S, 높이가 h일 때, 구분구적법을 이용하여 피라미드의 부피가 $\frac{1}{3}Sh$임을 보여라.



의 부피의 합을 V_n이라고 하면

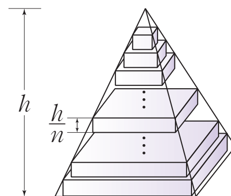
$$V_n=\frac{h}{n}\left\{\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\frac{kr}{n}\right)^2=\frac{\pi r^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 사각뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

스스로 하기 / 풀이

2 다음 그림과 같이 밑넓이가 S이고 높이가 h인 사각뿔의 높이를 n등분하는 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 사각뿔을 자른다.



이때, 자른 각 단면을 밑면으로 하고 $\frac{h}{n}$를 높이로 하는 $(n-1)$개의 직육면체를 만들고, k번째 직육면체의 밑넓이를 S_k라고 하면

$S_k : S = k^2 : n^2$

$\therefore S_k=S\left(\frac{k}{n}\right)^2$

높이가 $\frac{h}{n}$인 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V_n=\frac{h}{n}\left\{S\left(\frac{1}{n}\right)^2+S\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+S\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{Sh}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 피라미드(사각뿔)의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}Sh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}Sh$$

탐구하기 / 풀이

1. 구간 $[1,\ 3]$을 4등분하면 각 구간의 길이는 $\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로

$x_0=\mathbf{1}, x_1=\mathbf{1.5}, x_2=\mathbf{2},$
$x_3=\mathbf{2.5}, x_4=\mathbf{3}$

2. $f(x_1)=16-1.5^2=\mathbf{13.75}$

$f(x_2)=16-2^2=\mathbf{12}$

$f(x_3)=16-2.5^2=\mathbf{9.75}$

$f(x_4)=16-3^2=\mathbf{7}$

3. $(x_1-x_0)f(x_1)=0.5\times 13.75$
$=\mathbf{6.875}$

$(x_2-x_1)f(x_2)=0.5\times 12=\mathbf{6}$

$(x_3-x_2)f(x_3)=0.5\times 9.75$
$=\mathbf{4.875}$

$(x_4-x_3)f(x_4)=0.5\times 7=\mathbf{3.5}$

$\therefore 6.875+6+4.875+3.5=\mathbf{21.25}$

순서 \ k	0	1	2
1. x_k	1	1.5	2
2. $f(x_k)$		13.75	**12**
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$		**6.875**	**6**

순서 \ k	3	4	합
1. x_k	**2.5**	3	
2. $f(x_k)$	**9.75**	**7**	
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$	**4.875**	**3.5**	**21.25**

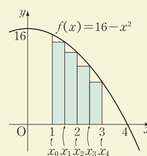
알아보기 / 해설

연속함수 $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 정의할 때는 구분구적법을 이용하기 위하여 먼저 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우에 대하여 정의한다.

02 정적분

탐구하기 / 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값

오른쪽 그림을 이용하여 함수 $f(x)=16-x^2$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이의 근삿값을 구할 수 있다. 다음의 순서에 의하여 표에 알맞은 것을 써넣어 보자.



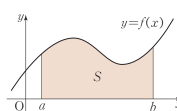
1. 구간 $[1,\ 3]$을 4등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$를 각각 구하여라.
2. $f(x_k)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$의 값을 각각 구하여라.
3. 색칠한 4개의 직사각형의 넓이의 합을 구하여라.

순서 \ k	0	1	2	3	4	합
1. x_k	1	1.5	2		3	
2. $f(x_k)$		13.75				
3. $(x_k-x_{k-1})f(x_k)$						

알아보기 / 정적분의 뜻을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)\geq 0$이라고 하자.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.



구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0\ (=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n\ (=b)$$

이라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이를 Δx라고 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

이때, 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$$

이라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$의 길이를 Δx라고 한 후 n개의 직사각형의 넓이의 합 S_n을 이용한다. 즉,

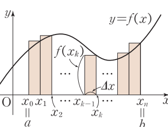
$$\int_a^b f(x)dx=S$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

그러나 $f(x)\geq 0$인 조건이 없어도 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이기만 하면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$는 존재하므로 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 정의된다.

98

오른쪽 그림과 같이 Δx를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_k)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$



이므로 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

가 존재한다.

정적분을 영어로 definite integral이라고 한다.

이때, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 '구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 정적분' 또는 '인티그럴 a부터 b까지 $f(x)dx$' 라고 읽는다.

여기서 a를 정적분의 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분 $\int f(x)dx$는 함수이지만 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 실수이다.

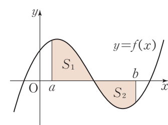
정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

한편 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 양의 값과 음의 값을 모두 가지면 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 $f(x)$가 양인 부분의 넓이 S_1에서 $f(x)$가 음인 부분의 넓이 S_2를 뺀 값을 나타낸다.



참고 | 현대적 의미의 적분법

구적 문제에 극한을 처음으로 도입한 사람은 16세기 스테빈(Stevin, S. ; 1548～1620)이었으며, 넓이나 부피가 한없이 작은 부분이 무수히 많이 모여서 된 것으로 생각한 사람은 케플러(Kepler, J. ; 1571～1630)이었다. 그리고 좀 더 엄밀하게 구적법을 다룬 수학자는 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598～1647)인데 그는 '넓이는 폭이 없는 선의 모임이고, 부피는 두께가 없는 면의 모임' 으로 생각하여 "불가분량의 기하"를 저술하기도 했다.

카발리에리는 $\int_0^a x^n\,dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$ $(n=9$까지$)$을 증명하였고, 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)는 $\int_0^a x^{\frac{q}{p}}dx=\frac{p}{p+q}a^{\frac{p+q}{p}}$을 보였으며, 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)도 넓이, 회전체의 부피 등을 계산하였다.

극한 개념을 사용하여 현대적 의미의 적분법을 시도한 사람은 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)이다. 그러나 극한의 개념이 확실하지 않아 그들의 방법도 직관적인 개념에 머물러 있었으며 코시(Cauchy, A. L. ; 1789～1857)에 와서야 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 현대적 의미의 적분이 완성되었다.

보충 학습

1. 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 함수 $f(x)$와 아래끝 a와 위끝 b만으로 결정되므로 적분변수와는 관계가 없다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt$$

2. 부정적분 $\int f(x)dx$는 함수이지만 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 상수이다.

참고 | 부정적분과 정적분

부정적분(不定積分)에서 '부정' 은 정해지지 않았다는 의미의 한자어이고, 정적분(定積分)에서 '정' 은 정해졌다는 의미의 한자어이다. 즉, 부정적분은 그 값이 정해지지 않고, 정적분은 그 값이 정해진다.

함 께 하 기 / 익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^1 (x^2-1)dx$를 구하여라.

풀이

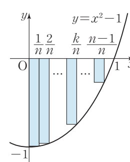
아래끝이 0이고 위끝이 1이므로 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$$

이라고 하면 구간

$$[x_{k-1},\ x_k]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

의 길이 Δx와 각 분점의 x좌표는



$$\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}$$

또 $f(x)=x^2-1$이므로

$$f(x_k)=x_k^2-1=\left(\frac{k}{n}\right)^2-1$$

$$f(x_k)\Delta x=\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}=\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\int_0^1 (x^2-1)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2}-1\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}-1=-\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{1}{n}\cdot n=1$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)<0$이면 $f(x_k)<0$, $\Delta x>0$이므로 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x<0$

스 스 로 하 기 / 익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 정적분의 정의를 이용하여 다음을 구하여라.

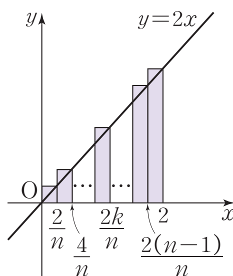
(1) $\int_0^2 2x\,dx$ (2) $\int_{-1}^{1} (4-x^2)dx$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 아래끝이 0이고 위끝이 2이므로 구간 $[0,\ 2]$를 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_k, $\cdots$, x_n이라고 하면 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이 Δx와 x_k는

$$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_k=0+k\Delta x=\frac{2k}{n}$$



또 $f(x)=2x$이므로

$$f(x_k)=2x_k=\frac{4k}{n}$$

$$f(x_k)\Delta x=\frac{4k}{n}\cdot\frac{2}{n}=\frac{8k}{n^2}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\int_0^2 2x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

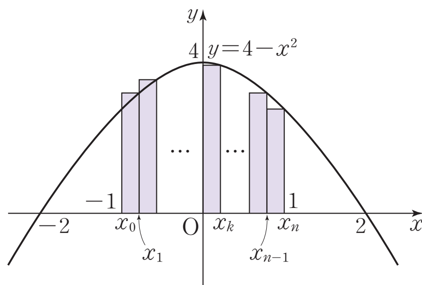
$$=\mathbf{4}$$

(2) 아래끝이 -1이고 위끝이 1이므로 구간 $[-1,\ 1]$을 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_k, $\cdots$, x_n이라고 하면 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$의 길이 Δx와 x_k는

$$\Delta x=\frac{1-(-1)}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_k=-1+k\Delta x$$

$$=-1+\frac{2k}{n}$$



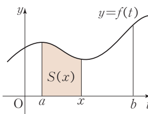
또 $f(x)=4-x^2$이므로

03 정적분의 기본 정리

알 아 보 기 / 정적분과 부정적분의 관계를 알아보자.

적분과 미분의 관계, 정적분과 부정적분의 관계를 알아보고, 이를 이용하여 정적분을 간편하게 구하는 방법을 알아보자.

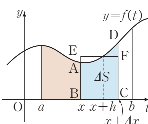
함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 a에서 x까지의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$\int_a^x f(t)dt$는 x의 값에 따라 변하므로 x의 함수이다.

이다. 여기서 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면 오른쪽 그림에서 ΔS는 도형 ABCD의 넓이이다.



도형 ABCD와 넓이가 같도록 직사각형 EBCF를 만들면 변 EF는 곡선과 만난다.

이때, 교점의 x좌표를 $x+h$라고 하면

$$\Delta S=f(x+h)\Delta x \qquad \therefore \frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x+h)$$

$0\leq h\leq \Delta x$이므로 Δx의 값이 0에 한없이 가까워지면 h의 값도 0에 한없이 가까워진다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$$

즉, 넓이를 나타내는 함수 $S(x)$의 도함수는 $f(x)$와 같다.

일반적으로 적분과 미분 사이에는 다음 관계가 성립한다.

적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\leq x\leq b$일 때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt\text{이면} \qquad S'(x)=f(x)$$

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

| 보기 | $\frac{d}{dx}\int_2^x (t^2+3t+2)dt=x^2+3x+2$

$$f(x_k)=4-{x_k}^2=4-\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2$$

$$=3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}$$

$$f(x_k)\Delta x=\left(3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\int_{-1}^1 (4-x^2)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{6}{n}+\sum_{k=1}^n\frac{8k}{n^2}-\sum_{k=1}^n\frac{8k^2}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\sum_{k=1}^n 1+\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^n k-\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6}{n}\cdot n+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=6+4-\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{22}{3}}$$

알아보기 / 해설

적분과 미분과의 관계는 피적분함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 a에서 x까지 $f(t)$를 정적분하고, 이를 x에 관하여 미분하면 원래의 함수 $f(x)$가 된다는 것이다. 이것은 적분이 미분의 역연산임을 뜻한다.



Plus 문제

다음을 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_0^x (t^2+3t)dt$

(2) $\int_3^x (t+2)^4 dt$

| 풀이 |

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\leq x\leq b$일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

가 성립함을 이용한다.

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x (t^2+3t)dt=x^2+3x$

(2) $\frac{d}{dx}\int_3^x (t+2)^4 dt=(x+2)^4$

알아보기 / 해설

- 정적분의 기본 정리는 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 정의를 이용하지 않고서도 쉽게 정적분을 구하는 방법을 알려 준다.
  즉, 이 정리는 넓이를 구하기 위하여 부분합을 계산하고 그 극한을 구하는 복잡한 과정을 거치지 않고 미분법의 공식을 역으로 적용하여 부정적분을 구하기만 하면 된다는 것을 보여준다.

- 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 구할 때는 먼저 피적분함수, 즉 $f(x)$의 부정적분 $\int f(x)dx=F(x)+C$를 구한 후 정적분의 기본 정리를 이용한다.

- 정적분의 기본 정리를 이용하면
  $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이므로
  (1) $\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0$
  (2) $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$
  $=-\{F(b)-F(a)\}$
  $=-\int_b^a f(x)dx$
  가 성립한다.

앞의 적분과 미분의 관계에서 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

여기서 $f(x)$의 또 다른 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=F(x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$S(a)$는 a에서 a까지의 넓이이므로 0이다.

한편 $S(x)$의 정의에서 $S(a)=0$이므로 ㉠에 $x=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C=0$$

$$\therefore C=-F(a) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

즉,

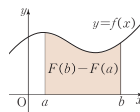
$$\int_a^x f(t)dt=S(x)=F(x)-F(a)$$

이다. 이 식의 위끝에 $x=b$를 대입하면

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

이다. 또 적분변수 t를 x로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$



이때, 우변 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같은 **정적분의 기본 정리**를 얻는다.

> **정적분의 기본 정리**
> 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면
> $$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

| **참고** | 정적분의 기본 정리를 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

참고 | 정적분의 기본 정리의 역사적 의미

구분구적법은 수천 년 전부터 있었으며 미분법이 발견되고 극한의 개념이 수학적으로 엄밀해지고 난 후 현대적 의미의 미분법과 그 역연산으로서의 부정적분이 정의되었다. 그러나 구분구적법을 토대로 한 정적분은 미분과의 어떤 관계도 찾지 못했었지만, 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 정적분의 기본 정리를 증명함으로써 부정적분을 이용하여 간단히 계산됨이 알려졌을 뿐만 아니라 드디어 미분의 역연산으로서의 의미를 가지게 되었다.

즉, 기원전부터 사용되던 정적분과 17세기에 와서야 정립된 미분이 서로 역연산의 관계임을 알려 준 정리가 곧 정적분의 기본 정리라고 할 수 있다.

함께하기 / 익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-4x+4$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 a의 값을 구하여라.

적분과 미분의 관계를 이용한다.

풀이

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\boldsymbol{f(x)=2x-4}$$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$$0=a^2-4a+4$$

$$\therefore \boldsymbol{a=2}$$

2 정적분 $\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx$를 구하여라.

피적분함수의 부정적분을 먼저 구한다.

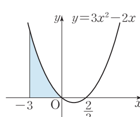
풀이

$3x^2-2x$의 한 부정적분이 x^3-x^2이므로

$$\int_{-3}^0 (3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_{-3}^0$$

$$=0-(-27-9)$$

$$=\boldsymbol{36}$$



스스로 하기 / 익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 임의의 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-8$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 양수 a의 값을 구하여라.

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^3 dx$ (2) $\int_{-1}^2 2x\,dx$

(3) $\int_{-2}^3 (3x^2-4x)dx$ (4) $\int_1^0 (4x^3+3x^2)dx$

함께하기 / 해설

1 함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ x]$에서 연속이고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면 정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

가 성립하므로 $\int_a^x f(t)dt$는 x에 대한 함수가 된다.

따라서 함수 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$G'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}$$

$$=F'(x)=f(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

스스로 하기 / 풀이

1 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\boldsymbol{f(x)=2x-2}$$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=0$이므로

$$0=a^2-2a-8$$

$$(a+2)(a-4)=0$$

$$\therefore \boldsymbol{a=4}\ (\because a>0)$$

2 (1) 1의 한 부정적분이 x이므로

$$\int_1^3 dx=\Big[x\Big]_1^3=3-1=\boldsymbol{2}$$

(2) $2x$의 한 부정적분이 x^2이므로

$$\int_{-1}^2 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_{-1}^2=4-1=\boldsymbol{3}$$

(3) $3x^2-4x$의 한 부정적분이 x^3-2x^2이므로

$$\int_{-2}^3 (3x^2-4x)dx$$

$$=\Big[x^3-2x^2\Big]_{-2}^3$$

$$=(27-18)-(-8-8)$$

$$=\boldsymbol{25}$$

(4) $4x^3+3x^2$의 한 부정적분이 x^4+x^3이므로

$$\int_1^0 (4x^3+3x^2)dx$$

$$=-\int_0^1 (4x^3+3x^2)dx$$

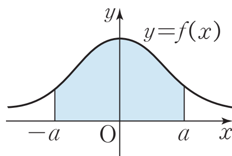
$$=-\Big[x^4+x^3\Big]_0^1$$

$$=-\{(1+1)-0\}=\boldsymbol{-2}$$

보충 학습

1. (1) 우함수

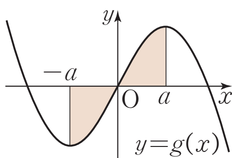
$f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수를 우함수라 하고 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



예를 들어 짝수 차수 함수 $f(x)=x^{2n}$은 우함수이다.

(2) 기함수

$g(-x)=-g(x)$를 만족하는 함수를 기함수라 하고 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



예를 들어 홀수 차수 함수 $g(x)=x^{2n-1}$은 기함수이다.

2. 정적분과 우함수, 기함수는 다음과 같은 관계가 있다.

(1) $f(x)$가 우함수일 때

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) $g(x)$가 기함수일 때

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx=0$$

04 정적분의 성질

알아보기 / 부정적분의 성질과 정적분의 기본 정리로부터 정적분의 성질을 알아보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $\int kf(x)dx=kF(x)+C$ (k는 상수)이므로

$$\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)$$
$$=k\{F(b)-F(a)\}=k\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=k\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 또 임의의 실수 c에 대하여

$$\int_a^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^c=F(c)-F(a)$$
$$\int_c^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_c^b=F(b)-F(c)$$

이므로

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다.

일반적으로 정적분에서 다음과 같은 성질이 성립한다.

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

[1] $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

[4] $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

정적분의 성질 [4]는 $a<c<b$가 아닐 때에도 성립한다.



Plus 문제

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1} (x^4+2x^2)dx$

(2) $\int_{-2}^{2} (x^5+x^3+x)dx$

| 풀이 |

(1) $\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2)dx=2\int_0^1(x^4+2x^2)dx$

$$=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$$
$$=2\times\Big(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\Big)=\mathbf{\frac{26}{15}}$$

(2) $\int_{-2}^{2} (x^5+x^3+x)dx=\mathbf{0}$

함께하기 /

익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$ (2) $\int_{0}^{3}|x-1|dx$

풀이

(1) $\int_{-2}^{1}(x+1)^3dx-\int_{-2}^{1}(x-1)^3dx$

$=\int_{-2}^{1}\{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx=\int_{-2}^{1}6x^2dx+\int_{-2}^{1}2dx$

$=\left[2x^3\right]_{-2}^{1}+\left[2x\right]_{-2}^{1}$

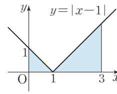
$=\{2-(-16)\}+\{2-(-4)\}=$ **24**

$\int_{-2}^{1}(6x^2+2)dx$
$=\left[2x^3+2x\right]_{-2}^{1}$
로 계산해도 된다.

(2) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\ge1)\\-x+1 & (x\le1)\end{cases}$

$x\le1$일 때
$f(x)=-(x-1)$
$=-x+1$



이므로 구간을 나누어 계산하면

$\int_{0}^{3}|x-1|dx=\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{1}^{3}(x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{3}$

$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

스스로 하기 /

익힘책 76쪽 | 익힘책 78쪽 | 익힘책 79쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}(x^2+2x)dx$

(2) $\int_{-1}^{2}(4x^3-3x^2+1)dx-\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2-2x)dx$

(3) $\int_{-1}^{2}|2x-1|dx$

(4) $\int_{-1}^{2}|x^2+2x-3|dx$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\int_{1}^{3}(x^2+2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{3}=\mathbf{\frac{50}{3}}$

(2) $\int_{-1}^{2}(4x^3-3x^2+1)dx$

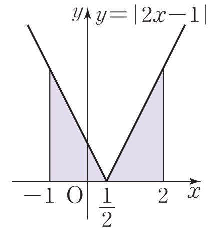
$-\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2-2x)dx$

$=\int_{-1}^{2}(-6x^2+2x+1)dx$

$=\left[-2x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2}=\mathbf{-12}$

(3) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\\-2x+1 & \left(x\le\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$



이므로 구간을 나누어 계산하면

$\int_{-1}^{2}|2x-1|dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx$

$+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x-1)dx$

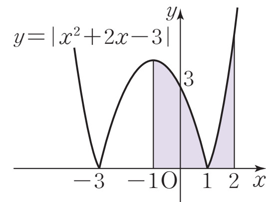
$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\mathbf{\frac{9}{2}}$

(4) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$f(x)$

$=|x^2+2x-3|$

$$=\begin{cases}x^2+2x-3 & (x\ge1)\\-x^2-2x+3 & (-3\le x\le1)\\x^2+2x-3 & (x\le-3)\end{cases}$$



이므로 구간을 나누어 계산하면

$\int_{-1}^{2}|x^2+2x-3|dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx$

$+\int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{1}$

$+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{1}^{2}$

$=\mathbf{\frac{23}{3}}$

중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) $\int 2x^9 dx = \mathbf{\frac{1}{5}x^{10}+C}$

(2) $\int (x^3+x^2+1)dx$

$= \mathbf{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x+C}$

(3) $\int (x+4)(x+2)dx$

$= \int (x^2+6x+8)dx$

$= \mathbf{\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x+C}$

(4) $\int x(x+1)(x+2)dx$

$= \int (x^3+3x^2+2x)dx$

$= \mathbf{\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2+C}$

2 구간 $[0, 2]$를 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \cdots, \frac{2k}{n}, \cdots, \frac{2n}{n}$

구간 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \cdots, n)$의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 k번째 직사각형의 넓이는

$\frac{2}{n}\left\{\frac{2k}{n}\left(2-\frac{2k}{n}\right)\right\} = \frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$

따라서 구하는 값은

$\int_0^2 x(2-x)dx$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left\{2\left(\frac{2k}{n}\right)-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n^2}-\frac{8k^2}{n^3}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$\quad - \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= 4-\frac{8}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

3 (1) $\int_{-2}^{2}\{-(x-3)^2\}dx$

$= \int_{-2}^{2}(-x^2+6x-9)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-9x\right]_{-2}^{2} = \mathbf{-\frac{124}{3}}$

(2) $\int_0^4 x(x-1)dx = \int_0^4 (x^2-x)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \mathbf{\frac{40}{3}}$

105

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
부정적분, 원시함수, 피적분함수, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 아래끝, 위끝, 정적분의 기본 정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$

1. 부정적분과 정적분

부정적분

계산

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 2x^9 dx$ (2) $\int (x^3+x^2+1)dx$

(3) $\int (x+4)(x+2)dx$ (4) $\int x(x+1)(x+2)dx$

구분구적법

이해

2 구분구적법을 이용하여 $\int_0^2 x(2-x)dx$를 구하여라.

정적분의 성질

계산

3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{2}\{-(x-3)^2\}dx$ (2) $\int_0^4 x(x-1)dx$

(3) $\int_0^4 3x(x-2)dx-\int_2^4 3x(x-2)dx$

절댓값이 있는 정적분의 계산

이해

4 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{2}|x+1|dx$ (2) $\int_{-1}^{2}|x^2-1|dx$

용수철의 길이

문제 해결

5 용수철을 처음 길이로부터 x m만큼 잡아당기는 데 드는 힘을 $F(x)$라고 하면

$F(x)=kx$ (단, k는 상수, 힘의 단위는 N)

이다. 또 어떤 물체에 힘 $F(x)$가 $x=a$에서 $x=b$까지 작용할 때, 힘 F가 한 일을 W라고 하면

$W=\int_a^b F(x)dx$ (단, 일의 단위는 J)

이다. 처음 길이가 0.2 m인 어떤 용수철을 길이가 0.3 m가 되도록 잡아당기는 데 필요한 힘은 20 N이다. 이 용수철의 길이를 0.3 m에서 0.4 m로 잡아당기는 데 한 일을 구하여라.

(3) $\int_{0}^{4} 3x(x-2)\,dx$

$-\int_{2}^{4} 3x(x-2)\,dx$

$=\int_{0}^{4} 3x(x-2)\,dx$

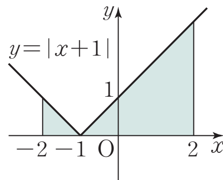
$+\int_{4}^{2} 3x(x-2)\,dx$

$=\int_{0}^{2} 3x(x-2)\,dx$

$=\int_{0}^{2} (3x^2-6x)\,dx$

$=\Big[x^3-3x^2\Big]_{0}^{2}=\mathbf{-4}$

4 (1)



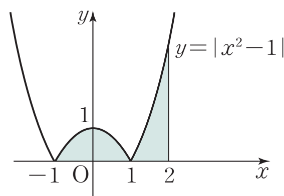
$\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} (-x-1)\,dx$

$+\int_{-1}^{2} (x+1)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^{2}=\mathbf{5}$

(2)



$\int_{-1}^{2} |x^2-1|\,dx$

$=\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{2} (x^2-1)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^{1}+\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{1}^{2}=\mathbf{\frac{8}{3}}$

5 용수철을 0.1 m 잡아당기는 데 필요한 힘이 20 N 이므로 $20=k\times0.1$ $\quad\therefore k=200$

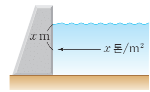
106

읽을거리

댐의 설계와 적분법

물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 그러므로 댐을 설계할 때 이 점을 중요하게 고려해야 한다.

수면으로부터 깊이가 x m인 지점의 댐에 수직으로 미치는 수압은 x 톤/m²이다. (x 톤/m²는 1 m²당 x 톤의 힘을 받는 것과 같다.) 이를테면 깊이가 10 m인 곳에서는 10 톤/m²의 압력을 받는다.

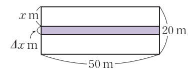


폭이 50 m인 댐에 20 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하여 보자.

일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다.

한편 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\Delta x)$ m인 지점까지의 넓이는 $50\Delta x$ m²이다.

또 이 부분의 수압은 x 톤/m²이므로 여기에 미치는 힘은

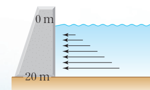


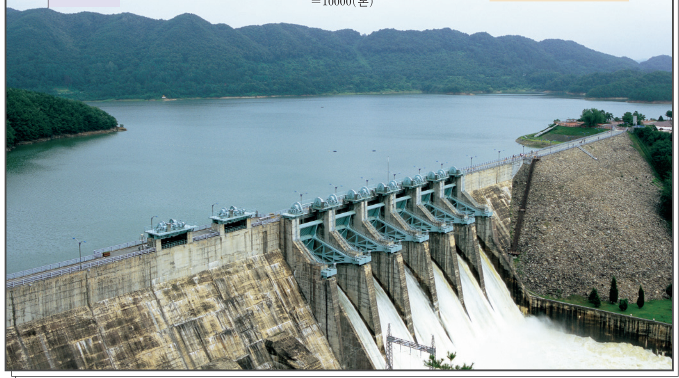
$50x\Delta x$ 톤

이므로 구하는 힘은 이들을 0 m에서 20 m까지 더하면 된다.

즉, 구하는 힘은 다음과 같다.

$$\int_{0}^{20} 50x\,dx=\Big[25x^2\Big]_{0}^{20}$$
$$=10000(\text{톤})$$





따라서 용수철의 길이를 0.3 m에서 0.4 m로 잡아당기는 데 한 일은

$\int_{0.3}^{0.4} 200x\,dx=\Big[100x^2\Big]_{0.3}^{0.4}=\mathbf{7\ (J)}$

읽을거리 / 해설

과학 기술의 발달에 공헌한 가장 큰 개념은

'작게(微) 나누고(分), 그것을 모으는(積)'

이라고 할 수 있다. 즉, 미적분(微積分)의 개념인 것이다. 요즘 각광을 받고 있는 BT(Bio Technology)나 NT(Nano Technology)도 작게 나눈 것을 바탕으로 생명 구조 또는 우주의 구조를 밝히려는 것이다.

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.291

01 바탕

다음 조건을 만족하는 함수 $F(x)$를 구하여라.

$$F'(x)=2x,\ F(1)=2$$

식을 전개하여 x^n의 부정적분을 이용한다.

02 바탕

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int (x-1)\left(3x+\frac{5}{3}\right)dx$ (2) $\displaystyle\int y(y+1)(y+2)dy$

(3) $\displaystyle\int (x-1)(x+1)(x^2+1)dx$

03 기본

다음 부정적분을 구하여라.

$$\int (x+y)^3dy-\int (x-y)^3dy$$

04 기본

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+1$이고 $f(1)=0$일 때, $f(-2)$의 값은?

① -9 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 9

05 실력

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x(x-1)$이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 M, 극솟값이 m일 때, $M-m$의 값을 구하여라.

06 기본

점 $(2,\ 1)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $-2x+3$일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

07 기본

무한급수 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{3}{n}$의 합을 정적분을 이용하여 구하여라.

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

08 바탕

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2(3x+2)dx$

(2) $\int_0^3(x^2-1)dx$

09
바탕

등식 $\int_0^a (x^3-x)dx=0$이 성립할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
$=\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

10
기본

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$　　(2) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3+x^2-3x)dx$

절댓값 기호가 있으면 구간을 나누어 계산한다.

11
기본

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^3 |x(x-1)|dx$　　(2) $\int_{-1}^2 |x^2-4x+3|dx$

12
실력

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$를 최소가 되게 하는 두 상수 a, b의 값은?

① $a=-1,\ b=\frac{1}{3}$　② $a=-\frac{1}{3},\ b=1$　③ $a=0,\ b=-\frac{1}{3}$
④ $a=\frac{1}{3},\ b=1$　⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{3}$

2 정적분의 활용

이 단원을 배우면

• 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
• 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.



1 정적분의 활용

소단원의 학습 목표

1. 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
2. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
3. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1 정적분의 활용

학습 목표
- 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.



다 가 서 기 / **나일강의 범람과 이집트의 토지 측량**

나일강 하류에 위치한 이집트는 상습적인 홍수로 인해 강의 상류에 있던 기름진 토사가 하류로 운반되면서 강 주변에 비옥한 평야를 갖게 되었다. 이 때문에 거름을 주지 않고도 농사를 잘 지을 수 있었다고 한다.

그런데 나일강이 범람하고 나면 침수되어 사라지거나 새로 생겨나는 토지들이 발생하고 기존 토지의 경계선이 없어졌기 때문에 이때마다 땅을 적절하게 재분배할 필요성이 생겼다. 이런 이유로 고대 이집트에서는 다양한 토지 측량술이 발전하였다.

현대에는 토지를 측량하거나 건물의 부피를 구할 때 적분법이 요긴하게 사용된다.



다가서기 / 해설

고대의 이집트에서는 나일강의 범람으로 강 주변의 땅 모양이 수시로 바뀌었다. 그래서 땅의 넓이를 정확히 측정하여 땅 주인들에게 적절히 분배하는 일이 매우 중요하였다. 하지만 자연적으로 바뀐 땅은 대개 불규칙한 곡선으로 둘러싸여 있어서 그 넓이를 구하기가 어렵기 때문에 근삿값으로 대신하였다. 이것이 최초의 적분 개념과 흡사한 구분구적법의 원리이다.

이집트를 비롯하여 바빌로니아, 중국 등의 고대 수학사에서도 도형의 길이, 넓이, 부피를 구하는 구적법이 사용되었으나 17세기에 와서야 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이 '움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 v가 주어질 때, 정해진 시간 $[a, b]$ 동안 그 물체가 그리는 자취의 길이'를 구하는 방법으로 적분법을 발견하였다. 한편 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)는 '곡선의 접선이 주어졌을 때, 그 곡선을 구하는 방법'을 찾기 위하여 적분법을 발견하였다.

참고 | 포도주 통과 적분법

독일, 프랑스 등 중부유럽 지역에서는 물의 질이 좋지 않아 식사 때마다 물 대신 포도주를 마시는 일이 많았다. 어느 포도주 장수는 통에 포도주를 넣고 다니며 팔았는데, 통 안에 자를 집어넣어 자가 포도주에 얼마나 젖는지를 보고 술의 양을 쟀다. 하지만 통의 가운데가 불룩하므로 위·아래 부분과 가운데 부분의 양이 다르기 때문에 양을 정확히 잴 수가 없었다. 하지만 술장수는 이에 관계없이 항상 자의 젖은 부분에 비례하여 돈을 받았다. 이에 독일의 천문학자이자 수학자로 유명한 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)는 정확하게 통의 부피를 계산하여 술장수에게 항의했다. 이때, 케플러는 구분구적법의 원리를 이용해 여러 개의 원기둥의 부피의 합으로 술통의 부피를 구했다는 일화가 있다.

109

01 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

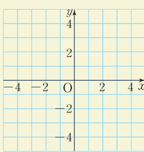
탐구하기 / 조건을 만족하는 구간 찾기

두 함수

$f(x)=x^2-2x$

$g(x)=x^3-3x^2-x+3$

에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



1. 오른쪽 좌표평면 위에 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그려라.
2. 각 함수에 대하여 함숫값이 0 이상이 되는 구간을 구하여라.

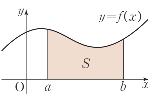
알아보기 / 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

$f(x)\le 0$일 때, $\int_a^b f(x)dx$의 값은 음수가 되므로 넓이를 구할 때에는 $-f(x)$의 정적분을 구해야 한다.

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때

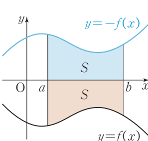
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



(ii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\le 0$일 때

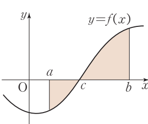
곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=-f(x)$와 x축에 대하여 대칭이고, $-f(x)\ge 0$이므로

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=\int_a^b|f(x)|dx$$



(iii) 구간 $[a, c]$에서 $f(x)\le 0$이고, 구간 $[c, b]$에서 $f(x)\ge 0$일 때

$$S=\int_a^c\{-f(x)\}dx+\int_c^b f(x)dx$$
$$=\int_a^c|f(x)|dx+\int_c^b|f(x)|dx$$
$$=\int_a^b|f(x)|dx$$



탐구하기 / 풀이

1. $f(x)=x^2-2x=x(x-2)$ ······ ㉠

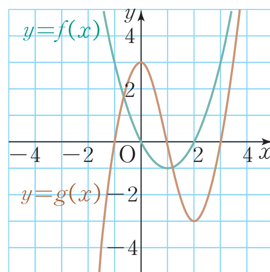
$g(x)=x^3-3x^2-x+3$에서 $g(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $g(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다. 그러므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해 하면

-1	1	-3	-1	3
		-1	4	-3
	1	-4	3	0

$g(x)=(x+1)(x^2-4x+3)$

$=(x+1)(x-1)(x-3)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



2. 물음 1의 그래프에서

$f(x)\ge 0$인 구간은

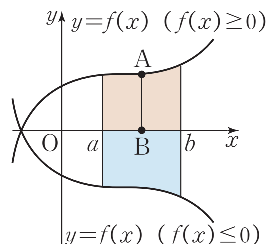
$\boldsymbol{x\le 0}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 2}$

$g(x)\ge 0$인 구간은

$\boldsymbol{-1\le x\le 1}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 3}$

알아보기 / 해설

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.



(i) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge 0$인 경우

넓이를 구하려는 도형은 길이가 $f(x)$인 선분 AB를 $x=a$에서 $x=b$까지 움직여서 만들어진 부분이므로

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b|f(x)|dx$$

(ii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\le 0$인 경우

선분 AB의 길이가 $-f(x)$이므로

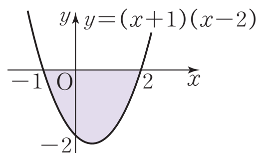
$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=\int_a^b|f(x)|dx$$

따라서 구간 $[a, b]$에서 $f(x)$의 부호에 관계없이 $\overline{AB}=|f(x)|$이고 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)|dx$$

스스로 하기 / 풀이

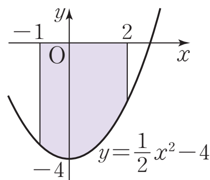
1 (1) $f(x)=(x+1)(x-2)$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{-(x+1)(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

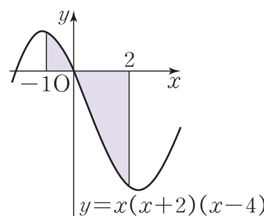
(2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{-\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\mathbf{\frac{21}{2}}$$

(3) $f(x)=x(x+2)(x-4)$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\ge 0$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}x(x+2)(x-4)\,dx+\int_{0}^{2}\{-x(x+2)(x-4)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-8x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2+8x)\,dx$$

110

이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

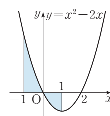
함 께 하 기 / 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

1 곡선 $y=x^2-2x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

그래프를 그려서 $f(x)\ge 0$인 구간과 $f(x)\le 0$인 구간으로 나누어 적분한다.

풀이

$f(x)=x^2-2x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)=x^2-2x\ge 0$이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x^2-2x\le 0$이므로

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$$
$$=\mathbf{2}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

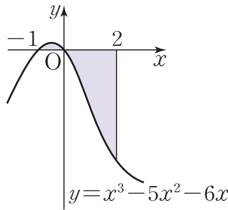
1 다음 곡선과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=(x+1)(x-2)$ (2) $y=\frac{1}{2}x^2-4$

(3) $y=x(x+2)(x-4)$ (4) $y=x^3-5x^2-6x$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-4x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{245}{12}$$

(4) $f(x)=x^3-5x^2-6x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\geq 0$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{-(x^3-5x^2-6x)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3-3x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{269}{12}$$

02 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

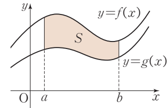
알 아 보 기 / 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여 보자.

이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $0\leq g(x)\leq f(x)$일 때

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

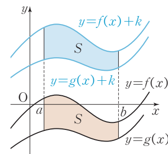


(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $g(x)\leq f(x)$이지만 $g(x)$ 또는 $f(x)$가 음의 값을 가질 때 오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동 하여

$$0\leq g(x)+k\leq f(x)+k$$

가 되도록 한다.

이때, 평행이동 한 도형의 넓이는 변하지 않으므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_a^b\{f(x)+k\}dx-\int_a^b\{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b[\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq g(x)$일 때에도 (i), (ii)와 같은 방법으로 하면 $S=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$

일반적으로 다음이 성립한다.

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

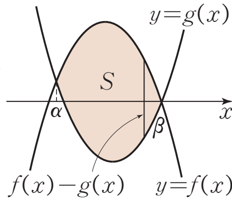
구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

알아보기 / 해설

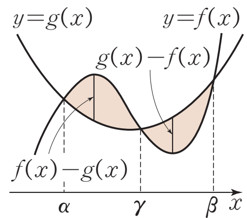
• 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자. 이때, 방정식 $f(x)=g(x)$를 풀어 교점의 x좌표를 구한 후 적분 구간을 정한다.

(1) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)\geq g(x)$인 경우



$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$$

(2) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이고 구간 $[\alpha,\ \gamma]$에서 $f(x)\geq g(x)$, 구간 $[\gamma,\ \beta]$에서 $g(x)\geq f(x)$인 경우



$$S=\int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$+\int_\gamma^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\gamma|f(x)-g(x)|dx$$
$$+\int_\gamma^\beta|f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$$

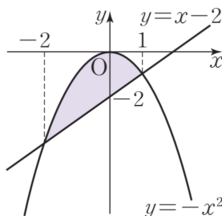
스스로 하기 / 풀이

1 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는 $-x^2=x-2$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



이때, 구간 $[-2,\ 1]$에서

$-x^2 \geq x-2$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{1}\{-x^2-(x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 좌표는

$x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

함 께 하 기 / 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

1 다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-1,\ y=x-1$ (2) $y=-x^2+5x-6,\ y=x^2-3x$

적분 구간을 찾기 위하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

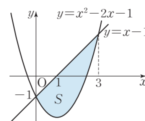
풀이

(1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-1=x-1$에서

$x=0,\ x=3$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서

$x-1\geq x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^3\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$

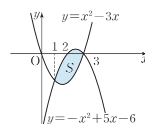
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는 $-x^2+5x-6=x^2-3x$에서

$x=1,\ x=3$이다.

이때, 구간 $[1,\ 3]$에서

$-x^2+5x-6\geq x^2-3x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_1^3\{(-x^2+5x-6)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=-2\int_1^3(x^2-4x+3)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

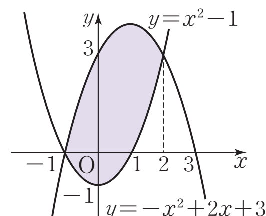
스 스 로 하 기 / 익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

1 다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2,\ y=x-2$

(2) $y=x^2-1,\ y=-x^2+2x+3$

(3) $y=x^3-2x,\ y=x^2$



이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서

$-x^2+2x+3\geq x^2-1$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)$

$=\frac{20}{3}+\frac{7}{3}$

$=\mathbf{9}$

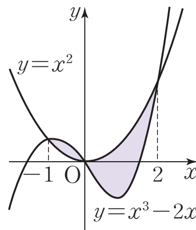
(3) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서

$x^3-2x\geq x^2$

이고, 구간 $[0,\ 2]$에서

$x^2\geq x^3-2x$

이므로 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}\,dx$

$+\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx$

$+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$

$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}$

$=\mathbf{\frac{37}{12}}$

113

공학 도구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

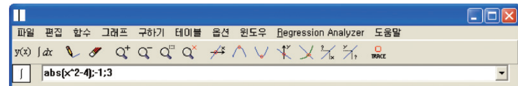
컴퓨터로 도형의 넓이 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

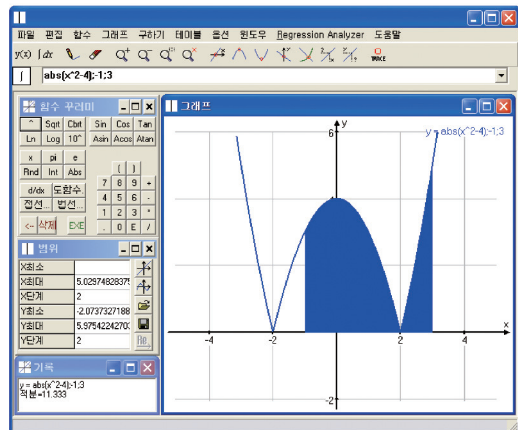
이 프로그램을 사용하여 곡선 $y=x^2-4$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 $\int_{-1}^{3}|x^2-4|\,dx$를 구하여 보자.

1단계 컴퓨터 프로그램을 실행시키고, 정적분 아이콘 $\int dx$를 클릭한다.

2단계 입력창에 abs(x^2−4);−1;3을 입력한다.



3단계 Enter 키를 누르면 '기록' 창에 구하는 도형의 넓이인 11.333이 나타난다.



공학도구 / 해설

본문에서 사용한 프로그램은 Equation Grapher로서 이를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 도형의 넓이를 구할 수 있는 프로그램으로 전국수학교사모임 (http://www.math.co.kr)에서 데모 버전을 내려 받을 수 있다.

03 속도와 거리

알 아 보 기 / 물체의 위치의 변화량과 물체가 움직인 거리를 구하여 보자.

수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 $t=a$에서의 위치 x_0을 알 때, 이 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$와 위치의 변화량을 구하여 보자.

위치 ↔ 속도 (미분 ↓, 적분 ↑)

$v(t)=x'(t)$이므로 $\quad x(t)=\int v(t)dt$

즉, $x(t)$는 $v(t)$의 부정적분이고, $x(a)=x_0$이므로

$$\int_a^t v(t)dt=x(t)-x(a)=x(t)-x_0$$

이 성립한다.

따라서 시각 t에서의 위치 $x(t)$는 $\quad x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

이때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$이다.

한편 시각 $t=a$에서 $t=b$까지

(i) $v(t)>0$일 때, $x(t)$는 증가하므로

$$x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(ii) $v(t)<0$일 때, $x(t)$는 감소하므로

$$x(a)-x(b)=\int_b^a v(t)dt=\int_a^b \{-v(t)\}dt$$

$|v(t)|$는 물체의 속력이다.

즉, $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

물체의 위치의 변화량과 수직선 위의 물체가 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면

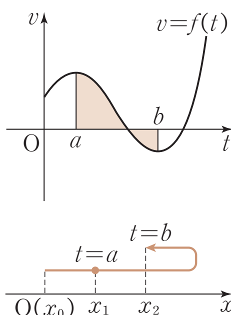
(1) 시각 t에서의 물체의 위치: $x(t)=x_0+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량: $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리: $\int_a^b |v(t)|dt$

알아보기 / 해설

• 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 v가 $v=f(t)$로 주어질 때



(1) 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량(변위)은

$$x_2-x_1=\int_a^b v\,dt=\int_a^b f(t)dt$$

(2) 시각 $t=b$일 때의 점 P의 위치는

$$x_2=\int_a^b v\,dt+x_0=\int_a^b f(t)dt+x_0$$

(단, x_0은 출발점의 위치)

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v|dt=\int_a^b |f(t)|dt$$

• 점 P의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리는 서로 다를 수 있음에 유의한다.

보충 학습

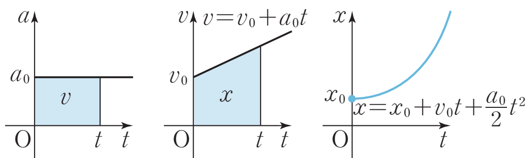
시각 t에서의 위치가 x일 때, 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

$$v=\frac{dx}{dt},\quad a=\frac{dv}{dt}$$

따라서 x_0에서 출발한 물체의 처음 속도가 v_0이고 가속도가 a_0이라고 하면 이 물체의 시각 t에서의 속도 v와 위치 x는 다음과 같다.

$$v=v_0+\int_0^t a_0\,dt=v_0+a_0t$$

$$x=x_0+\int_0^t v\,dt=x_0+\int_0^t (v_0+a_0t)dt=x_0+v_0t+\frac{a_0}{2}t^2$$



함 께 하 기 /

익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

1 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-3t+2$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 물체의 위치는 1이다.)

(1) 시각 $t=2$에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

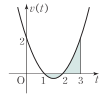
풀이

(1) 시각 $t=0$일 때의 위치가 1이므로 시각 $t=2$에서의 물체의 위치는

$$x(2)=1+\int_0^2(t^2-3t+2)dt=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=\frac{5}{3}$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^3=\frac{2}{3}$$





[1, 2]에서 $v(t)\le0$
[2, 3]에서 $v(t)\ge0$

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_1^3|t^2-3t+2|dt=\int_1^2(-t^2+3t-2)dt+\int_2^3(t^2-3t+2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^3=1$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 83쪽 | 익힘책 84쪽 | 익힘책 85쪽

1 어떤 로켓을 지면에서 발사한 후 t초일 때의 로켓의 수직 방향으로의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$$v(t)=-3t^2+192t+120$$

일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 발사한 후 t초일 때의 로켓의 높이 $h(t)$를 구하여라.

(2) 이 로켓을 발사한 후 30초일 때의 로켓의 높이를 구하여라.

함께하기 / 해설

1 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 t에 대하여 미분하면 $x'(t)=v(t)$이다.

따라서 $x(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 다음이 성립한다.

$$x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$$

이때, $t=b$를 대입하면

$$\int_a^b v(t)dt=x(b)-x(a)$$

이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 물체의 위치의 변화량 $x(b)-x(a)$는 $\int_a^b v(t)dt$이다.

그러나 물체가 움직인 거리는 속력을 적분한 것으로 물체의 위치나 위치의 변화량과는 다를 수도 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 시각 $t=0$일 때의 높이는 0이므로 $h(t)=h(0)+\int_0^t v(t)dt$에서

$$h(t)=\int_0^t(-3t^2+192t+120)dt=\left[-t^3+96t^2+120t\right]_0^t=\mathbf{-t^3+96t^2+120t}$$

(2) 시각 $t=30$에서의 로켓의 높이는

$$h(30)=-27000+86400+3600=\mathbf{63000}\ \mathbf{(m)}$$



Plus 문제

높이가 지면에서 20 m인 위치에서 공을 15 m/s의 속력으로 지면과 수직인 방향으로 위로 던졌다. t초 후 공의 속도가 $(15-10t)$ m/s일 때, 4초 후 공의 높이를 구하여라.

| 풀이 |

시각 t에서의 공의 높이는

$$20+\int_0^t(15-10t)dt=20+15t-5t^2$$

따라서 $t=4$일 때, 공의 높이는

$20+60-80=\mathbf{0}$ **(m)**

읽을거리 / 해설

• 로렌츠 곡선(Lorentz curve)

미국의 통계학자 로렌츠가 창안한 소득분포의 불균등도(不均等度)를 측정하는 곡선으로, 가로축에 소득액 순으로 소득 인원수의 누적 백분비를 나타내고, 세로축에 소득금액의 누적 백분비를 나타낸다. 소득의 분포가 완전히 균등하면 곡선은 대각선과 일치하고, 곡선과 대각선 사이의 넓이가 불균등도의 지표가 된다. 이 곡선은 소득분포뿐만 아니라, 경제량분포의 집중도 또는 불균등도를 측정하는 방법으로 사용되고 있다.

• 지니

이탈리아의 통계학자 지니는 사회유기체설(社會有機體說)의 입장을 취하여 민족을 생물유기체와 동일하게 보고 스스로 '신유기체설'을 제창하였다. 민족은 생물유기체와 같이 청춘기 · 장년기 · 노년기 등 3단계가 있으며, 청춘기의 단계에서는 인구증가율이 높고, 장년기 · 노년기로 접어들면 낮아져서 결국 쇠퇴하여 사멸한다는 것이다. 또 계급의 상하에 따라 출생률이 다르며, 상층계급은 낮은 출생률을, 하층계급은 높은 출생률을 가지게 된다고 주장하였다. 각 계급 간의 인구가 조화를 이루려면 상층계급은 언제나 중층계급과 하층계급으로부터 인구를 보충하지 않으면 안 된다. 이것이 지니가 주장한 '인구학적 신진대사(demographic metabolism)'이다.

읽을거리

정적분과 지니계수

미국의 통계학자 로렌츠(Lorentz, M. O.)가 창안한 소득 분포의 불균등도(不均等度)를 측정하는 방법으로 가로축에 소득이 낮은 인구로부터 높은 순으로 비율을 누적하여 표시하고, 세로축에는 각 인구의 소득 수준을 누적한 비율로 표시한 것이 로렌츠 곡선이다.

오른쪽 그림에서 대각선은 완전 균등선으로 소득 전액을 전 국민이 균등하게 분배하였음을 나타내고, 완전 균등선에 가까울수록 부의 분배가 균등하게 이루어지고 있음을 나타낸다.

또한 불균등도를 측정하는 방법으로 이탈리아의 통계학자 지니(Gini, C.)가 제시한 지표인 지니계수(Gini coefficient)가 있다.

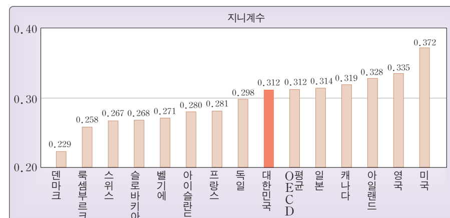
위의 그림에서 완전 균등선과 실제의 분배를 나타내는 로렌츠 곡선 사이의 넓이의 2배를 지니계수라고 한다. 즉, 로렌츠 곡선을 $L(x)$라고 하면 지니계수를 다음과 같이 정적분으로 나타낼 수 있다.

$$(\text{지니계수})=2\int_0^1 \{x-L(x)\}dx$$

여기서 완전 균등 상태의 지니계수는 0이고 완전 불균등 상태의 지니계수는 1이다.

지니계수의 값이 커지면 불균등도는 커지고, 지니계수가 작을수록 부의 균등 분배가 이루어지고 있음을 나타낸다.

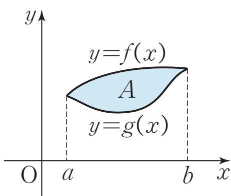
우리나라의 2005년 지니계수는 미국(0.372), 영국(0.335) 및 캐나다(0.319)보다 낮아 이들 국가보다 소득 분배가 양호하다는 것을 알 수 있다.



보충 학습

삼각형의 무게중심의 좌표는 정적분을 이용하지 않고도 구할 수 있지만, 일반적으로 여러 가지 도형의 무게중심의 좌표는 정적분을 이용하여 구한다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 밀도가 일정한 도형의 무게중심 $G(x_0,\ y_0)$의 좌표를 정적분을 이용하여 나타내면 다음과 같다.



$$x_0=\frac{\int_a^b x\{f(x)-g(x)\}\,dx}{A}$$

$$y_0=\frac{\int_a^b \left[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right]dx}{2A}$$

(단, A는 도형의 넓이)

117

중 단 원
확 인 하 기

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

계산

1 곡선 $y=x^2-1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

곡선과 x축 및 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이

계산

2 다음 곡선과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=(x-2)(x-3)$　　(2) $y=x^2-3x$

(3) $y=x(x+1)(x+2)$　　(4) $y=x^3-6x$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

계산

3 두 곡선 $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

속도와 거리

문제 해결

4 지상 30 m의 높이에서 29.4 m/s의 속력으로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=29.4-9.8t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=6$까지의 움직인 거리를 구하여라.

지니계수

의사소통

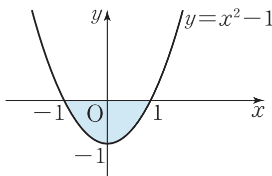
5 소득 분포의 불균형도를 측정하는 지니계수는 다음과 같이 구한다.

$$(\text{지니계수})=2\int_0^1\{x-f(x)\}dx \ (\text{단, } f(x)\text{: 로렌츠 곡선})$$

어느 나라의 로렌츠 곡선 $f(x)=0.9x^2+0.1x$일 때, 이 나라의 지니계수를 구하여라.

중단원 확인하기 / 풀이

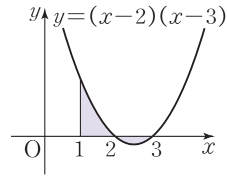
1 함수 $y=x^2-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-1,\ 1]$에서 $y=x^2-1\le0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

2 (1) 함수 $y=(x-2)(x-3)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[1,\ 2]$에서

$y=(x-2)(x-3)\ge0$

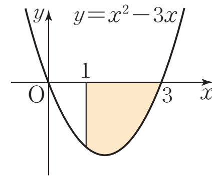
이고 구간 $[2,\ 3]$에서

$y=(x-2)(x-3)\le0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^3|(x-2)(x-3)|dx$$
$$=\int_1^3|x^2-5x+6|dx$$
$$=\int_1^2(x^2-5x+6)dx$$
$$+\int_2^3(-x^2+5x-6)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_1^2$$
$$+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$$
$$=\mathbf{1}$$

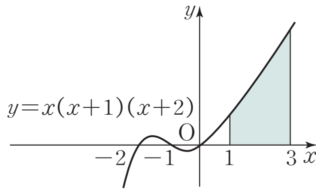
(2) 함수 $y=x^2-3x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[1,\ 3]$에서 $y=x^2-3x\le0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^3|x^2-3x|dx$$
$$=\int_1^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3=\mathbf{\frac{10}{3}}$$

(3) 함수 $y=x(x+1)(x+2)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[1,\ 3]$에서

$y=x(x+1)(x+2)\geq 0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^3 |x(x+1)(x+2)|dx$

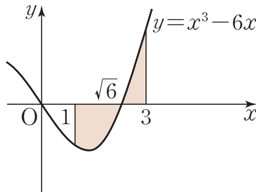
$=\int_1^3 |x^3+3x^2+2x|dx$

$=\int_1^3 (x^3+3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_1^3$

$=\mathbf{54}$

(4) 함수 $y=x^3-6x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[1, \sqrt{6}]$에서

$y=x^3-6x\leq 0$

이고 구간 $[\sqrt{6},\ 3]$에서

$y=x^3-6x\geq 0$

이므로 구하는 도형의 넓이는

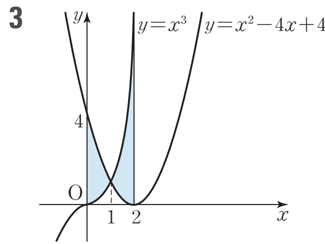
$\int_1^3 |x^3-6x|dx$

$=\int_1^{\sqrt{6}}(-x^3+6x)dx+\int_{\sqrt{6}}^3(x^3-6x)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+3x^2\right]_1^{\sqrt{6}}+\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2\right]_{\sqrt{6}}^3$

$=\mathbf{\frac{17}{2}}$

3



$S=\int_0^2 |x^3-(x^2-4x+4)|dx$

$=\int_0^1 (-x^3+x^2-4x+4)dx$

$+\int_1^2 (x^3-x^2+4x-4)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1$

$+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_1^2$

$=\mathbf{\frac{11}{2}}$

4 $v(t)=29.4-9.8t$이므로

$\int_0^6 |29.4-9.8t|dt$

$=\int_0^3 (29.4-9.8t)dt+\int_3^6(-29.4+9.8t)dt$

$=\left[29.4t-4.9t^2\right]_0^3+\left[-29.4t+4.9t^2\right]_3^6$

$=88.2$

따라서 움직인 거리는 **88.2 m**이다.

5 이 나라의 로렌츠 곡선은 $f(x)=0.9x^2+0.1x$이므로

(지니계수)

$=2\int_0^1 \{x-f(x)\}dx$

$=2\int_0^1 \{x-(0.9x^2+0.1x)\}dx$

$=2\int_0^1 (0.9x-0.9x^2)dx$

$=2\left[0.45x^2-0.3x^3\right]_0^1$

$=0.30$

따라서 구하는 지니계수는 **0.30**이다.

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.294

먼저 곡선과 x축의 교점을 구한다.

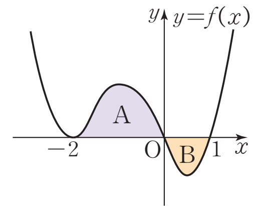
01 바탕

다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x$　　　　(2) $y=-x^2+4$

02 기본

오른쪽 그림과 같이 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 두 도형을 각각 A, B라고 하자. $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1)=3$이고, 두 도형 A, B의 넓이가 각각 9, 5일 때, $F(-2)$의 값은?



① -5　② -1　③ 1　④ 5　⑤ 9

03 기본

곡선 $y=x^2$과 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이가 21일 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $k>1$)

04 실력

곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 이 곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

함수 $f(x)$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

05 기본

삼차함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ 4

06 실력

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하도록 m의 값을 정하여라.

07 기본

곡선 $y=x(x-2)(x-a)$ $(a>2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 x축의 위쪽 부분과 아래쪽 부분의 넓이가 같아지도록 상수 a의 값을 정하여라.

원점을 출발하므로 시각 $t=0$ 일 때의 위치는 0이다.

08 바탕

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=6t-3t^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=3$에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량

09 기본

지상 30 m의 높이에서 24.5m/s의 속력으로 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=24.5-9.8t$일 때, 던진 후 1초부터 6초까지 이 물체가 움직인 거리를 구하여라.

10 실력

20 m/s의 속도로 달리는 자동차의 운전자가 200 m 전방에 있는 장애물을 보고 제동을 걸었다. 제동을 걸기 시작하여 t초 후의 자동차의 속도 $v(t)$ m/s가 $v(t)=20-at$일 때, 이 자동차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 a의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

대단원 평가 문제



정답과 풀이 p.296

01

정적분 $\int_{-3}^{0}(x^2-2x)dx$를 구하면?

① 15 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 25

02

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$을 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\int_{a}^{2}(a+x)^2dx$ ② $\int_{a}^{2}x^2dx$
③ $\int_{2}^{a}x^2dx$ ④ $\int_{2-a}^{a}x^2dx$
⑤ $\int_{0}^{2-a}(a+x)^2dx$

03

점 $(-1,\ 3)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(x+1)^2$일 때, $f(3)$의 값은?

① $\frac{70}{3}$ ② 24 ③ $\frac{73}{3}$
④ 26 ⑤ $\frac{80}{3}$

04

정적분 $\int_{0}^{4}|x-2|dx$를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

05

곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

06

수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-1$일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 이 물체가 움직인 거리는?

① $\frac{10}{3}$ ② 4 ③ $\frac{16}{3}$
④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{22}{3}$

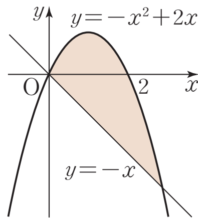
07

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{2}x+2$이고 $f(1)=\frac{29}{20}$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은?

① 0　② $\frac{3}{5}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

08

오른쪽 그림의 색칠한 부분은 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 도형을 나타낸 것이다. 다음 중 색칠한 도형의 넓이가 이 도형의 넓이와 같은 것은?



① $y=-x^2+1$ (그래프: -1, O, 1)
② $y=-x^2+3x$ (그래프: O, 3)
③ $y=x^2-4$ (그래프: -2, O, 2, -4)
④ $y=2x^2-4x$ (그래프: O, 2)
⑤ $y=-x^2+2x+3$ (그래프: -1, O, 3, 3)

09

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{4+4t^2}\,dt$의 값은?

① 1　② 2　③ $2\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

10

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & (x\ge 1) \\ x^2 & (x\le 1)\end{cases}$ 일 때, 정적분 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

11

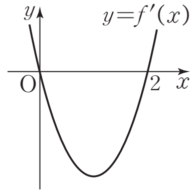
$x\ge 0$에서 정의된 함수 $f(x)=4x^3$과 그 역함수 $g(x)$에 대하여 정적분

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^4 g(x)\,dx$를 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

12

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 포물선이고, $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

13

두 곡선 $y=x^3$, $y=x^2-4x+4$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

14

지상 10 m의 높이에서 98 m/s의 속력으로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=98-9.8t$일 때, 쏘아 올린 후 10초 후의 지면으로부터 물체까지의 높이는?

① 300 m　② 350 m　③ 400 m　④ 450 m　⑤ 500 m

15

함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

16 UP!!

곡선 $y=x^2+1$과 이 곡선 위의 점 (2, 5)에서의 접선 및 x축의 양의 부분, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{23}{24}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{37}{24}$

17 서술형

등식 $f(x)=3x^2+\int_0^1(2x-t)f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

18 서술형

구분구적법을 이용하여 곡선 $y=2x^2$과 x축 및 직선 $x=a$ $(a>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

19 서술형

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

20 서술형

직선 궤도 위를 18 m/s의 속도로 달리는 열차가 있다. 이 열차가 브레이크를 걸고 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=18-1.2t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 이동한 거리를 구하여라.

(2) 브레이크를 건 후 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

따라서 접선의 방정식은

$y-te^t=e^t(t+1)(x-t)$

2단계 t에 대한 방정식을 구한다.

이 접선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-te^t=e^t(t+1)(a-t)$, $\quad e^t(t^2-at-a)=0$

$\therefore t^2-at-a=0\ (\because e^t>0)$

3단계 a의 값을 구한다.

오직 하나의 접선만 존재하므로 이차방정식 $t^2-at-a=0$이 중근을 가져야 한다.

$D=a^2+4a=0$에서 $\quad a(a+4)=0$

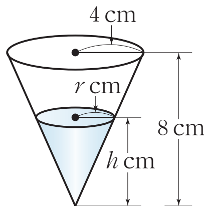
$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$

그런데 $a\neq0$이므로 $\quad a=-4$

답 -4

21 1단계 높이와 반지름의 길이 사이의 관계식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직원뿔 모양의 그릇에 담긴 물의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면



$4:8=r:h$에서

$r=\dfrac{h}{2}$ (cm)

2단계 부피에 관한 식을 구하고 미분을 한다.

물의 부피를 V라고 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{h^2}{4}\cdot h=\dfrac{\pi}{12}h^3$

t초 후 물의 높이는 $h=8-t$이므로

$V=\dfrac{\pi}{12}(8-t)^3$

$\quad=\dfrac{\pi}{12}(512-192t+24t^2-t^3)$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{12}(-192+48t-3t^2)$

3단계 물의 부피의 변화율을 구한다.

$t=2$일 때, 물의 부피의 변화율은

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=-16\pi+8\pi-\pi=-9\pi$ (cm^3/s)

답 -9π cm^3/s



Ⅲ 다항함수의 적분법

중단원 평가 문제

▶ 1. 부정적분과 정적분 / P_132

01 $F'(x)=2x$이므로 $F(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$

$F(1)=2$이므로 $\quad F(1)=1^2+C=2$

$\therefore C=1 \quad \therefore F(x)=x^2+1$

답 $F(x)=x^2+1$

02 (1) $\int(x-1)\left(3x+\dfrac{5}{3}\right)dx$

$=\int\left(3x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}\right)dx$

$=x^3-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+C$

(2) $\int y(y+1)(y+2)dy=\int(y^3+3y^2+2y)dy$

$=\dfrac{1}{4}y^4+y^3+y^2+C$

(3) $\int(x-1)(x+1)(x^2+1)dx$

$=\int(x^2-1)(x^2+1)dx$

$=\int(x^4-1)dx=\dfrac{1}{5}x^5-x+C$

답 (1) $x^3-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+C$ (2) $\dfrac{1}{4}y^4+y^3+y^2+C$ (3) $\dfrac{1}{5}x^5-x+C$

03 $\int(x+y)^3dy-\int(x-y)^3dy$

$=\int\{(x+y)^3-(x-y)^3\}dy$

$=\int(6x^2y+2y^3)dy=3x^2y^2+\dfrac{1}{2}y^4+C$

답 $3x^2y^2+\dfrac{1}{2}y^4+C$

04 $f'(x)=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

$f(1)=0$이므로 $f(1)=2+C=0 \quad \therefore C=-2$

$\therefore f(x)=x^2+x-2$

$\therefore f(-2)=0$

답 ③

05 $f'(x)=x(x-1)$이므로

$f(x)=\int x(x-1)dx$

$=\int (x^2-x)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=C=M$

$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{6}+C=m$

$\therefore M-m=C-\left(-\frac{1}{6}+C\right)=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

06 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $-2x+3$이므로

$f'(x)=-2x+3$

$\therefore f(x)=\int(-2x+3)dx=-x^2+3x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$f(2)=-2^2+3\times2+C=1$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=-x^2+3x-1$

답 $f(x)=-x^2+3x-1$

07 $a+\frac{(b-a)k}{n}\longrightarrow x$이므로 $1+\frac{2k}{n}\longrightarrow x$에서

$a=1, b-a=2$ $\therefore b=3$

또 $\frac{3}{n}=\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{3}{n}=\frac{3}{2}\int_1^3 x^4dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{363}{5}$

|다른 풀이|

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\longrightarrow\int_0^1, \frac{k}{n}\longrightarrow x, \frac{1}{n}\longrightarrow dx$에서

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{3}{n}$

$=3\int_0^1(1+2x)^4dx$

$=3\int_0^1(16x^4+32x^3+24x^2+8x+1)dx$

$=3\left[\frac{16}{5}x^5+8x^4+8x^3+4x^2+x\right]_0^1$

$=3\left(\frac{16}{5}+8+8+4+1\right)=3\cdot\frac{121}{5}=\frac{363}{5}$

답 $\frac{363}{5}$

08 (1) $3x+2$의 한 부정적분이 $\frac{3}{2}x^2+2x$이므로

$\int_1^2(3x+2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=(6+4)-\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{13}{2}$

(2) x^2-1의 한 부정적분이 $\frac{1}{3}x^3-x$이므로

$\int_0^3(x^2-1)\ dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^3=6$

답 (1) $\frac{13}{2}$ (2) 6

09 $\int_0^a(x^3-x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2=0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})a^2=0$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

답 $\sqrt{2}$

10 (1) $\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^1\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int_0^1\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$

$=\int_0^1(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$

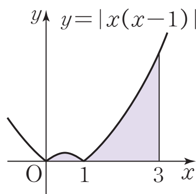
(2) $y=x^2$은 우함수이고, $y=x^3-3x$는 기함수이므로

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3+x^2-3x)dx$$
$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2dx+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3-3x)dx$$
$$=2\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2dx+0$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $2\sqrt{3}$

11 (1) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|x(x-1)|$$
$$=\begin{cases} x(x-1) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x(x-1) & (0\le x\le 1) \end{cases}$$

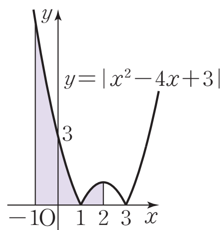


구간을 나누어 계산하면

$$\int_0^3 |x(x-1)|dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^3(x^2-x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left\{\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{28}{6}=\frac{29}{6}$$

(2) 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=|x^2-4x+3|$$
$$=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 3) \end{cases}$$



구간을 나누어 계산하면

$$\int_{-1}^2 |x^2-4x+3|dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2-4x+3)dx$$
$$+\int_1^2(-x^2+4x-3)dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+3)dx+\int_1^2(-x^2+4x-3)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^2$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+3\right)+\left\{\left(-\frac{8}{3}+8-6\right)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)\right\}$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{22}{3}$$

답 (1) $\frac{29}{6}$ (2) $\frac{22}{3}$

12 $\{f(x)\}^2=(x^2+ax+b)^2$

$$=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2$$

이므로

$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^1\{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}dx$$
$$+\int_{-1}^1(2ax^3+2abx)dx$$

$y=x^4+(a^2+2b)x^2+b^2$은 우함수이고,
$y=2ax^3+2abx$는 기함수이므로

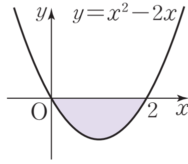
$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2\,dx=2\int_0^1\{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{a^2+2b}{3}x^3+b^2x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{a^2+2b}{3}+b^2\right)$$
$$=2\left\{\frac{1}{3}a^2+\left(b+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{45}\right\}$$

따라서 $a=0$, $b=-\frac{1}{3}$일 때, $\int_{-1}^1\{f(x)\}^2\,dx$는 최솟값 $\frac{8}{45}$을 가진다.

답 ③

▶ 2. 정적분의 활용 / P_147

01 (1) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는



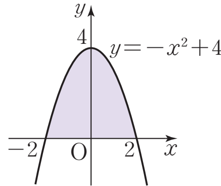
$x^2-2x=0$에서

$x=0,\ x=2$

이때, 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2-2\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2\{-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

(2) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2+4=0$에서

$x=-2,\ x=2$

이때, 구간 $[-2,\ 2]$에서 $-x^2+4\ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^2(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\int_0^2(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=2\left(-\frac{8}{3}+8\right)=\frac{32}{3}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{32}{3}$

02 $\int_{-2}^0 f(x)dx=9,\ \int_0^1 f(x)dx=-5$이므로

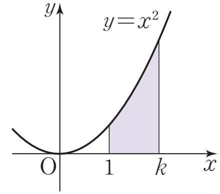
$$\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=9-5=4$$

이때, $\int_{-2}^1 f(x)dx=F(1)-F(-2)$이므로

$4=3-F(-2)\qquad \therefore F(-2)=-1$

답 ②

03 곡선 $y=x^2$과 두 직선 $x=1,\ x=k$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



색칠한 부분의 넓이가 21이므로

$$\int_1^k x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{3}=21$$

$k^3=64$

$\therefore k=4$

답 4

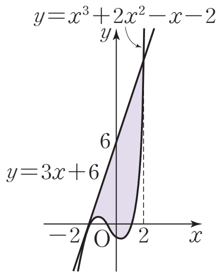
04 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$라고 하면

$f'(x)=3x^2+4x-1$이므로 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=3$

따라서 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=3(x+2)$, 즉 $y=3x+6$

한편 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는



$x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$x=-2,\ x=2$

이때, 구간 $[-2,\ 2]$에서

$x^3+2x^2-x-2\le 3x+6$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^2\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^2(-x^3-2x^2+4x+8)dx$$
$$=\int_{-2}^2(-2x^2+8)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{-2}^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+16\right)-\left(\frac{16}{3}-16\right)=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

05 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x^2+5x=x$

에서 $x=0$, $x=2$

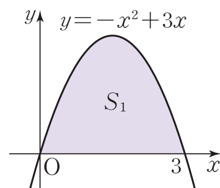
이때, 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-4x^2+5x\geq x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^2\{(x^3-4x^2+5x)-x\}\,dx$$
$$=2\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=2\left(4-\frac{32}{3}+8\right)=\frac{8}{3}$$

답 ①

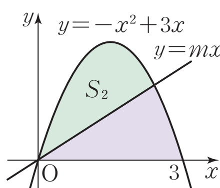
06 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=0$에서 $x=0$, $x=3$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서 $-x^2+3x\geq 0$이므로 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은



$$S_1=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$$

한편 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=mx$에서

$x=0$, $x=3-m$

이때, 구간 $[0,\ 3-m]$에서 $-x^2+3x\geq mx$이므로 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_0^{3-m}\{(-x^2+3x)-mx\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{m}{2}x^2\right]_0^{3-m}$$
$$=-\frac{1}{3}(3-m)^3+\frac{3}{2}(3-m)^2-\frac{m}{2}(3-m)^2$$
$$=\frac{1}{6}(3-m)^3$$

$S_1=2S_2$이므로 $\quad \dfrac{9}{2}=2\cdot\dfrac{(3-m)^3}{6}$

$$(3-m)^3=\frac{27}{2}$$

$$3-m=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\therefore\ m=3-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

답 $3-\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

07 곡선 $y=x(x-2)(x-a)\ (a>2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 x축의 위쪽 부분과 아래쪽 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^2 y\,dx=\int_2^a(-y)dx$$

$$\int_0^2 y\,dx+\int_2^a y\,dx=0,\ \text{즉}\ \int_0^a y\,dx=0$$

$$\int_0^a y\,dx=\int_0^a x(x-2)(x-a)dx$$
$$=\int_0^a\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}a^3+a^3$$
$$=-\frac{1}{12}a^3(a-4)=0$$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>2)$

답 4

08 (1) 원점을 출발하므로 시각 $t=0$일 때의 위치는 0이다.

따라서 시각 $t=3$에서의 물체의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^t v(t)dt=0+\int_0^3(6t-3t^2)dt$$
$$=\Big[3t^2-t^3\Big]_0^3=27-27=0$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량은

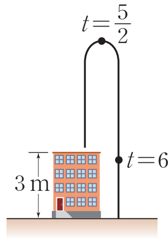
$$\int_1^4(6t-3t^2)dt=\Big[3t^2-t^3\Big]_1^4$$
$$=(48-64)-(3-1)$$
$$=-18$$

답 (1) 0 (2) -18

09 물체가 최고점에 도달할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=24.5-9.8t=0$에서

$t=\dfrac{5}{2}$



따라서 $\dfrac{5}{2}$초 후에 최고점에 도달하므로 던진 후 1초부터 6초까지 움직인 거리는

$$\int_1^6|24.5-9.8t|dt$$
$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(24.5-9.8t)dt+\int_{\frac{5}{2}}^6(-24.5+9.8t)dt$$
$$=\Big[24.5t-4.9t^2\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\Big[-24.5t+4.9t^2\Big]_{\frac{5}{2}}^6$$
$$=11.025+60.025=71.05\ (\text{m})$$

답 71.05 m

10 자동차가 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=20-at=0\qquad \therefore t=\dfrac{20}{a}$

즉, $\dfrac{20}{a}$초 후에 자동차는 완전히 정지한다.

이때, 정지할 때까지의 이동거리는

$$\int_0^{\frac{20}{a}}(20-at)dt=\Big[20t-\frac{1}{2}at^2\Big]_0^{\frac{20}{a}}$$
$$=\frac{400}{a}-\frac{200}{a}=\frac{200}{a}$$

그런데 $\dfrac{200}{a}\le 200$이어야 하므로 $\quad a\ge 1$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

답 ②

대단원 평가 문제

p.150~153

01 $$\int_{-3}^0(x^2-2x)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_{-3}^0$$
$$=-(-9-9)=18$$

답 ②

02 (i) $x=\dfrac{(2-a)k}{n}$라고 하면

$k=0$일 때, $x=0$

$k=n$일 때, $x=2-a$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx$$

(ii) $x=a+\dfrac{(2-a)k}{n}$라고 하면

$k=0$일 때, $x=a$

$k=n$일 때, $x=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_a^2 x^2dx$$

(i), (ii)로부터

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$
$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx=\int_a^2 x^2\,dx$$

답 ②, ⑤

03 $f'(x)=(x+1)^2$이므로

$$f(x)=\int(x+1)^2\,dx$$
$$=\int(x^2+2x+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$$

$f(-1)=3$이므로

$$\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2+(-1)+C=3$$
$$\therefore C=\frac{10}{3}$$
$$\therefore f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3+3^2+3+\frac{10}{3}=\frac{73}{3}$$

답 ③

04 피적분함수를 $f(x)$라고 하면

$f(x)$
$=|x-2|$
$=\begin{cases} x-2 & (x\geq 2) \\ -x+2 & (x\leq 2) \end{cases}$

이므로 구간을 나누어 계산하면

$\int_0^4 |x-2|dx$
$=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^4(x-2)dx$
$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^4$
$=(-2+4)+\{(8-8)-(2-4)\}=4$

답 ④

05 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+x=0$에서

$x=0$, $x=1$

이때, 구간 $[0, 1]$에서

$-x^2+x\geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$S=\int_0^1(-x^2+x)dx$
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$

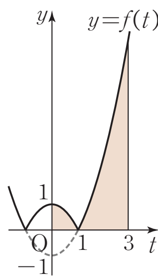
답 ①

06 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리는

$\int_0^3|t^2-1|dt$

$f(t)=|t^2-1|$이라고 하면

$f(t)=\begin{cases} t^2-1 & (t\leq -1 \text{ 또는 } t\geq 1) \\ -t^2+1 & (-1\leq t\leq 1) \end{cases}$



$\therefore \int_0^3|t^2-1|dt$
$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^3(t^2-1)dt$
$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^3$
$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left\{(9-3)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$
$=\frac{2}{3}+\frac{20}{3}=\frac{22}{3}$

답 ⑤

07 $f'(x)=-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{2}x+2$이므로

$f(x)=\int\left(-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{2}x+2\right)dx$
$=-\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x+C$

$f(1)=\frac{29}{20}$이므로

$f(1)=-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}+2+C=\frac{29}{20}$

$\therefore C=\frac{2}{5}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{2}{5}$이므로

방정식 $f(x)=0$, 즉

$-\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{2}{5}=0$의 모든 근의 곱은

$-\frac{\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=2$

답 ⑤

08 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=-x$에서

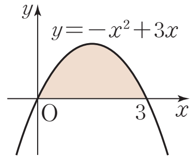
$x=0$, $x=3$

구간 $[0, 3]$에서

$-x^2+2x\geq -x$이므로 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_0^3\{(-x^2+2x)-(-x)\}dx$
$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$

이것은 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



답 ②

09 $f(t)=\sqrt{4+4t^2}$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{4+4t^2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=\sqrt{4}=2$$

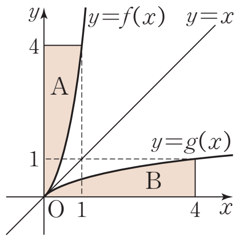
답 ②

10 $\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(2x-x^2)dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}+\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\left\{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ④

11 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(A의 넓이)
=(B의 넓이)

따라서 구하는 정적분은 네 점 (0, 0), (1, 0), (1, 4), (0, 4)를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로 4이다.

답 ③

12 $f'(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$로 놓으면

$$f(x)=\int ax(x-2)dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=4$, $f(2)=0$

$f(0)=4$에서 $C=4$ ······㉠

$f(2)=0$에서 $\frac{8}{3}a-4a+C=0$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{8}{3}a-4a+4=0$

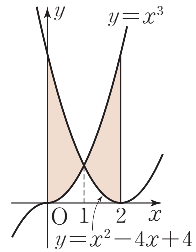
$\therefore a=3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+4$

$\therefore f(3)=3^3-3\times3^2+4=4$

답 ④

13 두 곡선 $y=x^3$과 $y=x^2-4x+4$의 교점의 x좌표는



$x^3=x^2-4x+4$에서

$x=1$

이때, 구간 [0, 1]에서

$x^2-4x+4\geq x^3$

이고 구간 [1, 2]에서

$x^2-4x+4\leq x^3$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1\{(x^2-4x+4)-x^3\}dx$$
$$+\int_1^2\{x^3-(x^2-4x+4)\}dx$$
$$=\int_0^1(-x^3+x^2-4x+4)dx$$
$$+\int_1^2(x^3-x^2+4x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1$$
$$+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2+4\right)$$
$$+\left\{\left(4-\frac{8}{3}+8-8\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+2-4\right)\right\}$$
$$=\frac{25}{12}+\frac{41}{12}=\frac{11}{2}$$

답 ②

14 t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$$h(t)=10+\int_0^t(98-9.8t)dt$$
$$=10+\left[98t-4.9t^2\right]_0^t$$
$$=-4.9t^2+98t+10$$

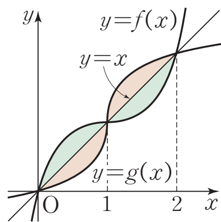
따라서 구하는 높이는

$$h(10)=-4.9\times100+98\times10+10=500\,(\mathrm{m})$$

답 ⑤

15 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 두 배이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+3x=x$

에서

$x=0,\ x=1,\ x=2$

이때, 구간 $[0,\ 1]$에서

$x^3-3x^2+3x\geq x$

이고 구간 $[1,\ 2]$에서

$x^3-3x^2+3x\leq x$

이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=2\left[\int_0^1\{(x^3-3x^2+3x)-x\}\,dx+\int_1^2\{x-(x^3-3x^2+3x)\}\,dx\right]$$
$$=2\left\{\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx\right\}$$
$$=2\left\{\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2\right\}$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{4}-1+1\right)+\left\{(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\right\}\right]$$
$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$$

답 ①

16 $f(x)=x^2+1$이라고 하면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(2)=4$

따라서 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 방정식은

$y-5=4(x-2)$, 즉 $y=4x-3$

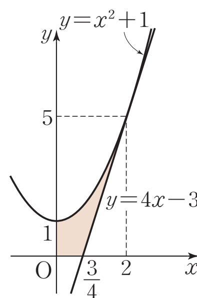
한편 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=4x-3$의 교점의 x좌표는 $x^2+1=4x-3$에서

$x=2$

또 직선 $y=4x-3$과 x축의 교점의 x좌표는 $4x-3=0$에서

$x=\frac{3}{4}$

그러므로 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=4x-3$을 좌표평면 위에 함께 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 구간 $\left[0,\ \frac{3}{4}\right]$에서

$x^2+1\geq0$

이고 구간 $\left[\frac{3}{4},\ 2\right]$에서

$x^2+1\geq4x-3$

이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{3}{4}}(x^2+1)dx+\int_{\frac{3}{4}}^2\{x^2+1-(4x-3)\}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{3}{4}}(x^2+1)dx+\int_{\frac{3}{4}}^2(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{3}{4}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{3}{4}}^2$$

$=\left(\frac{9}{64}+\frac{3}{4}\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{8}+3\right)\right\}$

$=\frac{57}{64}+\frac{125}{192}=\frac{37}{24}$

답 ①

17 1단계 $\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 tf(t)dt=b$로 놓고 $f(x)$를 a, b로 나타낸다.

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 tf(t)dt=b$로 놓으면

$f(x)=3x^2+\int_0^1(2x-t)f(t)dt$

$=3x^2+2x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$

$=3x^2+2ax-b$

2단계 b의 값을 구한다.

$\int_0^1 f(t)dt=a$에서

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(3t^2+2at-b)dt$

$=\left[t^3+at^2-bt\right]_0^1$

$=1+a-b=a$

$\therefore b=1$

3단계 a의 값을 구한다.

$\int_0^1 tf(t)dt=1$에서

$\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1(3t^3+2at^2-t)dt$

$=\left[\frac{3}{4}t^4+\frac{2a}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$=\frac{3}{4}+\frac{2a}{3}-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{2a}{3}=1$

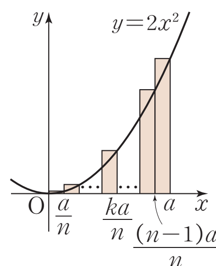
$\therefore a=\frac{9}{8}$

4단계 함수 $f(x)$를 구한다.

$\therefore f(x)=3x^2+2ax-b=3x^2+\frac{9}{4}x-1$

답 $f(x)=3x^2+\frac{9}{4}x-1$

18 1단계 구간 $[0, 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표와 y좌표를 구한다.



구간 $[0, 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \cdots, \frac{ka}{n}, \cdots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}$

이때의 y의 좌표는 차례로

$0, 2\left(\frac{a}{n}\right)^2, 2\left(\frac{2a}{n}\right)^2, \cdots, 2\left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2, 2\left(\frac{na}{n}\right)^2$

2단계 직사각형의 넓이의 합을 구한다.

k번째 직사각형의 넓이는 $\frac{a}{n}\cdot 2\left(\frac{ka}{n}\right)^2$이므로 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{a}{n}\cdot 2\left(\frac{ka}{n}\right)^2\right\}$

$=\frac{2a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{2a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3단계 도형의 넓이를 구한다.

따라서 구하는 넓이 S는

$S=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}=\frac{2}{3}a^3$

답 $\frac{2}{3}a^3$

19 1단계 주어진 곡선과 직선 및 x축의 각각의 교점을 구한다.

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+6x=2x$에서

$x=0, x=4$

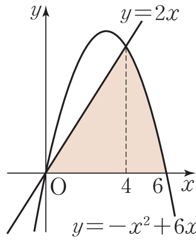
곡선 $y=-x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=0$에서

$x=0, x=6$

2단계 도형의 넓이를 구한다.

따라서 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$를 좌표평면 위에 함께 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 구간 $[0, 4]$에서 $2x \ge 0$이고 구간 $[4, 6]$에서 $-x^2+6x \ge 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^4 2x\,dx+\int_4^6(-x^2+6x)dx$$
$$=\left[x^2\right]_0^4+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_4^6$$
$$=16+\left\{(-72+108)-\left(-\frac{64}{3}+48\right)\right\}=\frac{76}{3}$$

답 $\frac{76}{3}$

20 **1단계** 정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.

(1) 열차가 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=18-1.2t=0$ $\quad\therefore t=15$

즉, 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간은 15초이다.

2단계 이동한 거리를 구한다.

이때, 이동한 거리는

$$\int_0^{15}(18-1.2t)dt=\left[18t-0.6t^2\right]_0^{15}$$
$$=270-135=135\ (\mathrm{m})$$

3단계 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간을 구한다.

(2) 120 m 이동하는 데 t초 걸린다고 하면

$$\int_0^t(18-1.2t)dt=\left[18t-0.6t^2\right]_0^t$$
$$=18t-0.6t^2=120$$

에서

$t^2-30t+200=0$, $(t-10)(t-20)=0$

$\therefore t=10$ 또는 $t=20$

그런데 (1)에서 $0<t<15$이므로 열차가 브레이크를 건 후 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간은 10초이다.

답 (1) 135 m (2) 10초

IV 확률

중단원 평가 문제

▶ 1. 조합 / P_167

01 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 21가지

02 $(x+y+z)^5$을 전개할 때, 생기는 항은

x^5, y^5, z^5, x^4y, $\cdots$, x^2y^2z, $\cdots$

등으로 모두 5차항이다.

따라서 항의 가짓수는 x, y, z의 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)

답 21가지

03 세 문자 x, y, z로 만들 수 있는 4차항의 개수는 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 항의 개수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(개)

답 ⑤

04 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$(개)

답 ③

05 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5+10-1}C_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4$

$=\frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}=1001$(가지)

답 ①

06 먼저 사과, 감, 귤을 한 개씩 바구니에 넣고, 9개의 과일을 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$(가지)

답 ②

IV 확률

1 조합 2 확률의 뜻과 활용 3 조건부확률



복잡하고 방대한 자료를 과학적으로 정리하고 분석하여 미래를 예측할 때, 경우의 수와 확률이 널리 사용된다. 예를 들어 기상청에서는 과거의 기록 및 구름 사진 등과 같은 기상 자료를 바탕으로 다가올 날씨를 예측한다. 또한 생명 과학에서 특정 유전자가 나타날 확률을 알면 생명체의 신비를 풀 수 있다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶**중학교 1학년**
- 상대도수

▶**중학교 2학년**
- 경우의 수
- 확률의 뜻과 기본 성질

▶**고등학교 수학**
- 순열, 조합



이번에 배울 내용

- 중복조합
- 이항정리
- 확률의 뜻과 기본 성질
- 확률의 계산과 활용
- 조건부확률
- 확률의 곱셈정리
- 독립과 종속



다음에 배울 내용

▶**미적분과 통계 기본**
- 통계

이 단원의 학습 목표

1. 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
2. 이항정리의 뜻과 그 성질을 이해한다.
3. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하고 그 관계를 이해한다.
4. 확률의 기본 성질을 이해한다.
5. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
6. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
7. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
8. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
9. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

120



단원을 시작하기 전에 …

집합의 연산 **1** 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) $A\cup B$　(2) $A\cap B$　(3) $A-B$

여집합의 뜻 **2** 전체집합 $U=\{n\,|\,n$은 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$의 여집합 A^C를 구하여라.

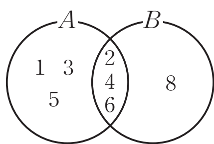
다항식의 연산 **3** 다음 식을 전개하여라.
(1) $(a+b)^2$　(2) $(a+b)^3$

순열과 조합 **4** 다음 값을 구하여라.
(1) ${}_8\mathrm{P}_2$　(2) ${}_8\mathrm{C}_2$

확률의 뜻 **5** 정십이면체 모양인 주사위의 각 면에 1부터 12까지의 수가 적혀 있다. 이 주사위를 던져서 윗면에 나오는 수를 조사할 때, 다음을 구하여라.
(1) 홀수가 나올 확률　(2) 3의 배수가 나올 확률

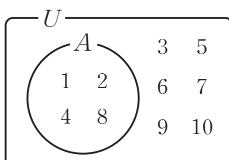
단원을 시작하기 전에 ·················• 풀이

1 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



(1) $A\cup B=\{\mathbf{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8}\}$
(2) $A\cap B=\{\mathbf{2,\ 4,\ 6}\}$
(3) $A-B=\{\mathbf{1,\ 3,\ 5}\}$

2 전체집합 U를 원소나열법으로 나타내면
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
두 집합 U, A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A^C=\{\mathbf{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10}\}$

3 (1) $(a+b)^2=\mathbf{a^2+2ab+b^2}$
(2) $(a+b)^3=\mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

4 (1) ${}_8\mathrm{P}_2=8\times7=\mathbf{56}$
(2) ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{{}_8\mathrm{P}_2}{2!}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=\mathbf{28}$

5 나올 수 있는 모든 경우의 수는 12가지이다.
(1) 홀수가 나오는 경우는 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6가지이므로 구하는 확률은
$\dfrac{6}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$
(2) 3의 배수가 나오는 경우는 3, 6, 9, 12의 4가지이므로 구하는 확률은
$\dfrac{4}{12}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

1 조합

이 단원을 배우면

• 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.

• 이항정리의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.



소단원의 학습 목표

1. 중복조합의 뜻을 안다.
2. 중복조합의 수를 구할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

중복조합

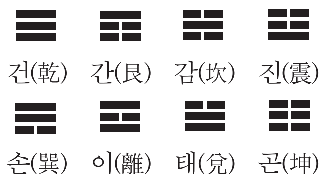
다가서기 / 해설

동양에서는 예로부터 하늘과 땅, 해와 달, 양지와 음지 등을 양(陽)과 음(陰)으로 생각하고, 그것을 기호로 나타낼 때 두 개의 효(⚊, ⚋)를 사용하였다. 이것은 서양에서 발전한 이진법 또는 모스 부호와도 매우 비슷하다.

두 개의 ⚊, ⚋ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 것은 다음과 같이 4가지가 있다.

{⚊, ⚊, ⚊} {⚊, ⚊, ⚋}
{⚊, ⚋, ⚋} {⚋, ⚋, ⚋}

이들을 순서를 생각하여 세로로 배열하면 다음과 같은 8가지의 괘(卦)가 나온다. 이것을 8괘(八卦)라고 한다.



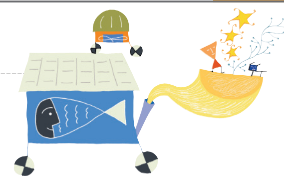
태극기에 있는 4개의 괘는 각각 건(乾), 곤(坤), 감(坎), 이(離)로서 이들은 각각 하늘, 땅, 물, 불을 상징한다.

또 이들 8개의 괘를 상하로 두 개씩 배열하면 64괘(64卦)가 나온다.

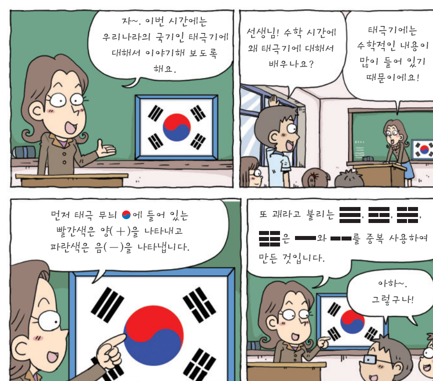
1 조합

1 중복조합

학습 목표
- 중복조합의 뜻을 안다.
- 중복조합의 수를 구할 수 있다.



다 가 서 기 / **태극기 속의 수학**



태극기의 괘(卦)는 양을 나타내는 ⚊와 음을 나타내는 ⚋를 중복 사용하여 나타낸 것이다. ⚊와 ⚋ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 방법은 다음과 같이 4가지가 있다.

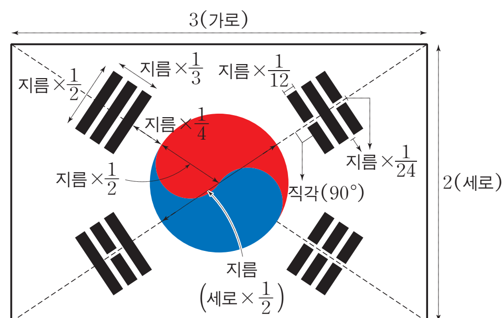
{⚊, ⚊, ⚊}, {⚊, ⚊, ⚋},
{⚊, ⚋, ⚋}, {⚋, ⚋, ⚋}

그리고 이들을 순서를 생각하여 세로로 배열하면 8가지의 괘가 나오는데 그 중에서 태극기에 있는 괘는 다음의 4가지이다.

☰, ☲, ☵, ☷

참고 | 태극기의 규격

태극의 지름의 길이를 기준 1로 놓으면 각 부분의 크기는 다음과 같다.



123

01 중복조합의 뜻

탐구하기 / 컵 고르기



희주는 친구의 생일에 선물할 컵 2개를 고르려고 한다. 선물 가게에는 빨간색, 파란색, 노란색 세 종류의 컵이 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 컵 2개를 같은 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.
2. 컵 2개를 서로 다른 색으로 고르는 경우의 수를 구하여라.

알아보기 / 중복조합의 뜻을 알아보자.

$_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$)

4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 카드 2장을 택하는 조합은 다음과 같다. 이때, 조합의 수는 $_4C_2=6$이다.

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4},
{2, 3}, {2, 4}, {3, 4}

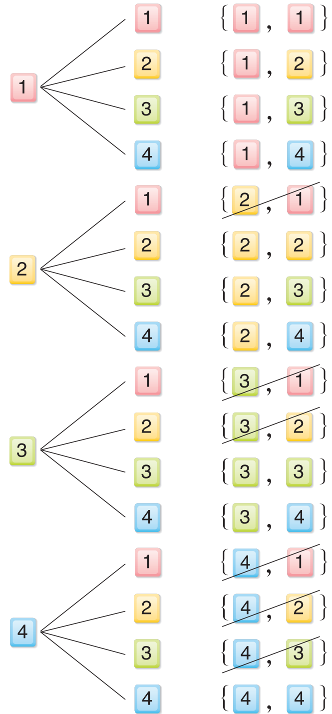
한편 4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 생각하면 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4},
~~{2, 1}~~, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4},
~~{3, 1}~~, ~~{3, 2}~~, {3, 3}, {3, 4},
~~{4, 1}~~, ~~{4, 2}~~, ~~{4, 3}~~, {4, 4}

이와 같이 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라고 한다.

스스로 하기 / 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽

1 3장의 카드 1, 2, 3 에서 2장을 택하는 중복조합을 만들어 보아라.



탐구하기 / 풀이

1. 빨간색 컵 2개를 고르는 경우, 파란색 컵 2개를 고르는 경우, 노란색 컵 2개를 고르는 경우의 **3**가지 경우가 있다.

2. 빨간색 컵과 파란색 컵을 고르는 경우, 파란색 컵과 노란색 컵을 고르는 경우, 노란색 컵과 빨간색 컵을 고르는 경우의 **3**가지 경우가 있다.

알아보기 / 해설

4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

스스로 하기 / 풀이

1 3장의 카드 1, 2, 3 에서 중복을 허용하여 2장을 택하는 조합을 생각하면 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}
~~{2, 1}~~, {2, 2}, {2, 3}
~~{3, 1}~~, ~~{3, 2}~~, {3, 3}

위의 그림에서
{2, 1}, {3, 1}, {3, 2}는 각각
{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}과 같으므로 제외한다.

따라서 구하는 중복조합은 다음과 같다.

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3},
{2, 2}, {2, 3}, {3, 3}

02 중복조합의 수

알 아 보 기 / 중복조합의 수를 구하여 보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이다.

이제 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수를 구하여 보자.

이를테면 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개의 숫자를 택하는 중복조합을 숫자의 크기 순서로 정리하면

1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 2,
2, 3, 2, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 4 …… ㉠

여기서 이들 각 조합의 두 번째 숫자에 1을 더하면 ㉠의 조합은 각각 다음과 같다.

1, 1	→	1, 2
1, 2	→	1, 3
1, 3	→	1, 4
1, 4	→	1, 5
2, 2	→	2, 3
2, 3	→	2, 4
2, 4	→	2, 5
3, 3	→	3, 4
3, 4	→	3, 5
4, 4	→	4, 5

1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 2, 3,
2, 4, 2, 5, 3, 4, 3, 5, 4, 5 …… ㉡

이때, ㉠의 조합 전체의 집합과 ㉡의 조합 전체의 집합은 일대일 대응이므로 그 원소의 개수는 같다. 그런데 ㉡은 서로 다른 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 2개의 숫자를 택하는 조합이므로 그 수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{2}$이다.

한편 $5=4+2-1$이므로 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$$

일반적으로 중복조합의 수는 다음과 같다.

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 94쪽 | 익힘책 95쪽 | 익힘책 96쪽



1 사과, 감, 배, 포도, 귤 5종류의 과일에서 중복을 허용하여 2개씩 포장하는 경우의 수를 구하여라.

2 다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.
(1) $(a+b)^4$ (2) $(a+b+c)^3$

스스로 하기 / 풀이

1 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{5+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=\mathbf{15}$(가지)

2 (1) 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{2+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{4}={}_{5}\mathrm{C}_{1}=\mathbf{5}$(개)

(2) 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{3+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\mathbf{10}$(개)

참고 | 순열, 조합의 문제 풀이 오류 유형

순열, 조합과 관련된 문제에 대한 이해 과정에서 오류를 범하는 경우가 많다.
다음의 예를 통하여 주의하도록 한다.

1. 순서에 관한 오류

순서를 고려하지 않아야 할 경우에 고려하거나, 반대로 순서를 반드시 고려해야 할 경우에 고려하지 않는 경우이다.

문제

4장의 우표 a, b, c, d를 A, B 두 사람에게 2장씩 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

오답 우표 4장을 A, B 두 사람에게 2장씩 나누어 주는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

A	a, b	a, c	a, d	b, c	b, d	c, d
B	c, d	b, d	b, c	a, d	a, c	a, b

A가 먼저 받고 B가 나중에 받는 경우와 B가 먼저 받고 A가 나중에 받는 경우를 모두 고려하면 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$(가지)

→ A, B 두 사람이 우표를 받는 순서는 문제와 관련이 없으므로 2를 곱해서는 안 된다.

정답 구하는 경우의 수는 오답의 표의 경우인 6가지이다.

2. 중복에 관한 오류

중복이 가능함에도 불구하고 중복가능성을 고려하지 않거나 어떤 것이 중복이 가능한지 잘못 판단하는 경우이다.

문제

서로 다른 자동차 4대를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

오답 각 사람에게 최대 4개까지 줄 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $4\times4\times4=64$(가지)

→ 중복할 수 있는 것은 '사람'이 아니라 '자동차'이다.

정답 각 자동차마다 세 사람에게 나누어 줄 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$3\times3\times3\times3=81$(가지)

125

2 이항정리

학습 목표

- 이항정리의 뜻을 안다.
- 이항정리의 성질을 이해한다.



1 조합

다 가 서 기 / 징검다리 건너기



흰 돌 3개와 검은 돌 3개가 교대로 놓인 징검다리에서 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 1가지이다. 또한 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법도 1가지이다. 그러면 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까? 또 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 몇 가지일까? (단, 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 짝을 지으면 각각의 짝지어진 2개의 돌 중에서 반드시 하나만 딛고 간다.)

이 단원을 배우면 이러한 문제를 해결할 수 있다.

소단원의 학습 목표

1. 이항정리의 뜻을 안다.
2. 이항정리의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

이항정리, 이항계수

다가서기 / 해설

다음 그림과 같이 흰 돌 3개와 검은 돌 3개를 교대로 배열하고 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 각각 짝을 짓는다. 그리고 짝지어진 돌 중 하나만 딛는다고 하자.



여기서 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법과 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 각각 다음과 같다.



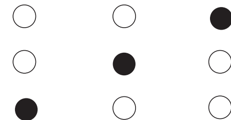
흰 돌 3개 

검은 돌 3개 

즉, 흰 돌만 3개를 딛고 가는 방법은 1가지이고, 검은 돌만 3개를 딛고 가는 방법도 1가지이다.

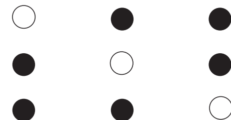
한편 각각의 짝지어진 돌 2개 중에서 반드시 하나만 딛고 가야 하므로 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 다음과 같다.





즉, 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 방법은 3가지이다. 또 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 다음과 같다.

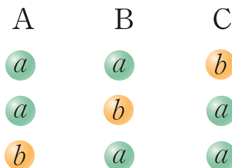




즉, 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 방법은 3가지이다.

탐구하기 / 풀이

1. 세 주머니 A, B, C에서 ⓐ를 2개, ⓑ를 1개 꺼내는 경우는 다음과 같이 3가지가 있다.



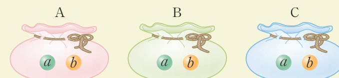
2. a^2b가 되려면 ⓐ를 2개, ⓑ를 1개 꺼내야 한다.
이것은 세 주머니 A, B, C에서 ⓐ를 꺼낼 2개의 주머니를 택하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$가지이다. 또는 세 주머니 A, B, C에서 ⓑ를 꺼낼 1개의 주머니를 택하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$가지이다.

3. a^3은 세 주머니 A, B, C에서 모두 ⓐ를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3$가지이다. 또는 세 주머니 A, B, C에서 ⓑ를 하나도 꺼내지 않아야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_0$가지이다.
ab^2은 ⓐ를 1개, ⓑ를 2개 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$ (또는 ${}_3\mathrm{C}_2$)가지이다.
b^3은 세 주머니 A, B, C에서 모두 ⓑ를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3$ (또는 ${}_3\mathrm{C}_0$)가지이다.

01 이항정리의 뜻

탐구하기 / 다항식의 전개

아래 그림의 세 주머니 A, B, C에서 ⓐ, ⓑ 중 하나를 각각 꺼내어 곱하여 보자. 예를 들어 세 주머니 A, B, C에서 각각 ⓐ, ⓑ, ⓐ를 꺼내면 그 곱은 $aba=a^2b$가 된다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 주머니에서 ⓐ를 2개, ⓑ를 1개 꺼내는 경우의 수를 구하여라.
2. a^2b가 되는 경우의 수를 ${}_n\mathrm{C}_r$의 꼴로 나타내어라.
3. a^3, ab^2, b^3이 되는 경우의 수를 각각 ${}_n\mathrm{C}_r$의 꼴로 나타내어라.

알아보기 / 이항정리의 뜻을 알아보자.

$(a+b)^n$의 각 항의 계수는 조합을 이용하여 구할 수 있다.

이를테면 다항식 $(a+b)^4$의 전개식을 구하여 보자.
$(a+b)^4$을 전개하면 a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4의 항이 생긴다.
여기서 a^3b의 계수는 오른쪽 그림과 같이 4개의 인수 중에서 a를 3개, b를 1개 택하는 조합의 수 ${}_4\mathrm{C}_1$과 같다.

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$		
a	a	a	b	: a^3b	${}_4\mathrm{C}_1$
a	a	b	a	: a^3b	
a	b	a	a	: a^3b	
b	a	a	a	: a^3b	

같은 방법으로 a^4, a^2b^2, ab^3, b^4의 계수를 각각 구하면 다음과 같다.
$${}_4\mathrm{C}_0,\ {}_4\mathrm{C}_2,\ {}_4\mathrm{C}_3,\ {}_4\mathrm{C}_4$$
따라서 $(a+b)^4$의 전개식은 다음과 같다.
$$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$$

알아보기 / 해설

• a^4의 계수

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
a	a	a	a	: ${}_4\mathrm{C}_0$

즉, 4개의 인수 중에서 a를 4개, b를 0개 택하는 조합의 수이므로 a^4의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_0$이다.

• a^2b^2의 계수

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
a	a	b	b	${}_4\mathrm{C}_2$
a	b	a	b	
a	b	b	a	
b	a	a	b	
b	a	b	a	
b	b	a	a	

즉, 4개의 인수 중에서 a를 2개, b를 2개 택하는 조합의 수이므로 a^2b^2의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

일반적으로

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 우변의 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서는 b를 택하고 $(n-r)$개의 인수에서는 a를 택하여 곱한 것이다. 이와 같은 경우의 수는 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_nC_r$와 같다.

따라서 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_nC_r$이다.

이처럼 두 개의 항으로 이루어진 $(a+b)$의 거듭제곱, 즉 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 **이항정리**라고 한다.

이항정리

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$과 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

또 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_n$$

을 **이항계수**라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

함 께 하 기 / 익힘책 98쪽 | 익힘책 99쪽 | 익힘책 100쪽

1 이항정리를 이용하여 $(2a+3b)^3$을 전개하여라.

풀이

$(2a+3b)^3={}_3C_0(2a)^3+{}_3C_1(2a)^2\cdot 3b+{}_3C_2\cdot 2a(3b)^2+{}_3C_3(3b)^3$

$=1\times 8a^3+3\times 4a^2\times 3b+3\times 2a\times 9b^2+1\times 27b^3$

$=\mathbf{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 98쪽 | 익힘책 99쪽 | 익힘책 100쪽

1 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^5$ (2) $(2a+b)^4$

(3) $(a-b)^6$ (4) $(2a-3b)^4$

함께하기 / 해설

이항정리

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_nb^n$$

에서 a 대신 $2a$, b 대신 $3b$를 대입하여 전개한다. 이때, $n=3$으로 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 이항정리에 $n=5$를 대입한다.

$(a+b)^5$

$={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4b+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4ab^4+{}_5C_5b^5$

$=\mathbf{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

(2) 이항정리에 $n=4$, a 대신 $2a$를 대입한다.

$(2a+b)^4$

$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3b+{}_4C_2(2a)^2b^2+{}_4C_3\cdot 2ab^3+{}_4C_4b^4$

$=1\times 16a^4+4\times 8a^3\times b+6\times 4a^2\times b^2+4\times 2a\times b^3+1\times b^4$

$=\mathbf{16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4}$

(3) 이항정리에 $n=6$, b 대신 $-b$를 대입한다.

$(a-b)^6$

$={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5(-b)+{}_6C_2a^4(-b)^2+{}_6C_3a^3(-b)^3+{}_6C_4a^2(-b)^4+{}_6C_5a(-b)^5+{}_6C_6(-b)^6$

$=\mathbf{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$

(4) 이항정리에 $n=4$, a 대신 $2a$, b 대신 $-3b$를 대입한다.

$(2a-3b)^4$

$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3(-3b)+{}_4C_2(2a)^2(-3b)^2+{}_4C_3\cdot 2a(-3b)^3+{}_4C_4(-3b)^4$

$=\mathbf{16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4}$

알아보기 / 해설

이항정리

$(a+b)^n$

$={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_nb^n$

에 a 대신 1, b 대신 x를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$(1+x)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

위의 식에서 x 대신 여러 가지 값을 대입하면 다양한 식의 값을 구할 수 있다.

128

02 이항정리의 성질

알 아 보 기 / 이항정리의 성질에 대하여 알아보자.

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이다. 이때, 이 전개식을 이용하면 여러 가지 이항정리의 성질을 증명할 수 있다.

함 께 하 기 / 익힘책 98쪽 | 익힘책 99쪽 | 익힘책 100쪽

1 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$ {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

증명

이항정리에 의하여

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

$$\therefore {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 98쪽 | 익힘책 99쪽 | 익힘책 100쪽

1 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7$

(2) ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$

2 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(2) n이 홀수일 때

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

스스로 하기 / 풀이

1 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$에

(1) $n=7$을 대입하면

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7$

$=2^7=\mathbf{128}$

(2) $n=10$을 대입하면

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}$

$=2^{10}=\mathbf{1024}$

2 (1) $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

이고 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1-1)^n$

$={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots$

$+(-1)^n{}_nC_n$

$\therefore {}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots$

$+(-1)^n{}_nC_n=0$

(2) 함께하기 1에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$ ……㉠

n이 홀수일 때, (1)에 의하여

${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+{}_nC_4+\cdots$

$+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n=0$ ……㉡

(ⅰ) ㉠+㉡을 하면

$2({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1})=2^n$

$\therefore {}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

(ⅱ) ㉠−㉡을 하면

$2({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)=2^n$

$\therefore {}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}$

$={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$=2^{n-1}$

129

중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
중복조합, 이항정리, 이항계수

IV _1. 조합

이해

중복조합

1 세 종류의 필기도구 연필, 색연필, 볼펜을 파는 문구점에서 5개의 필기도구를 사는 경우의 수를 구하여라.

추론

중복조합의 활용

2 방정식 $x+y+z=8$을 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

계산

이항정리

3 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+b)^5$　　　(2) $(x-3y)^4$

계산

이항정리의 성질

4 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8$

(2) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

의사소통

소위원회의 구성

5 어떤 위원회의 전체 위원의 수는 11명이다. 이들 중 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만들려고 한다. 이 소위원회를 만들 수 있는 경우의 수를 구하여라.



중단원 확인하기 / 풀이

1 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5$

$={}_7C_2=$ **21**(가지)

2 예를 들어 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수해 중

$x=3$, $y=4$, $z=1$

은 x를 3개, y를 4개, z를 1개 선택하는 것으로 생각하자.

이때, 구하는 해의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8$

$={}_{10}C_2=$ **45**(개)

3 (1) $(2a+b)^5$

$={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4b_2$

$+{}_5C_2(2a)^3b^2+{}_5C_3(2a)^2b^3$

$+{}_5C_4\cdot 2ab^4+{}_5C_5b^5$

$=\mathbf{32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3}$

$\mathbf{+10ab^4+b^5}$

(2) $(x-3y)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-3y)$

$+{}_4C_2x^2(-3y)^2+{}_4C_3x(-3y)^3$

$+{}_4C_4(-3y)^4$

$=\mathbf{x^4-12x^3y+54x^2y^2-108xy^3}$

$\mathbf{+81y^4}$

4 (1) ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=$ **256**

(2) ${}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8$

$=2^{9-1}=$ **256**

5 11명 중 n명으로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는 서로 다른 11개에서 n개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{11}C_n$

따라서 11명 중에서 2명 이상 5명 이하로 구성된 소위원회를 만드는 경우의 수는

${}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$

이항정리의 성질에 의하여

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$

여기서 ${}_{11}C_6={}_{11}C_5$, ${}_{11}C_7={}_{11}C_4$, $\cdots$, ${}_{11}C_{11}={}_{11}C_0$이므로

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}$

$=2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)$

$=2^{11}$

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$

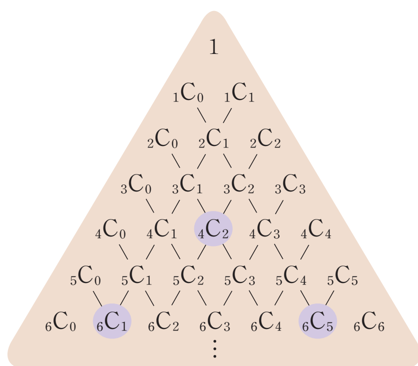
$\therefore {}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$

$=2^{10}-{}_{11}C_0-{}_{11}C_1$

$=1024-1-11=$ **1012**(가지)

수학 실험실 / 해설

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수를 교과서 130쪽의 그림과 같이 삼각형 모양으로 배열할 수 있다.
이 그림은 삼각형의 제일 윗 줄부터 차례로 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 19$까지의 $(a+b)^n$의 각 항의 계수를 나타낸다.
이것을 조합의 기호로 쓰면 다음과 같다.

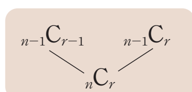


이와 같은 이항계수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다.
'파스칼의 삼각형' 은 '미적분과 통계 기본' 에서는 교육과정 상의 용어가 아니다.
그러나 이것이 특별히 어려운 것도 아니고, 이 용어를 알아 두면 매우 편리하므로 여기에서 소개한다.
파스칼의 삼각형에서 이항계수의 배열이 좌우 대칭이므로 다음이 성립한다.

$${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

또 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래의 중앙에 있는 수와 같으므로 다음을 알 수 있다.

$${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$$

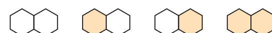


130

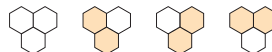
수학 실험실

이항계수로 만드는 도형

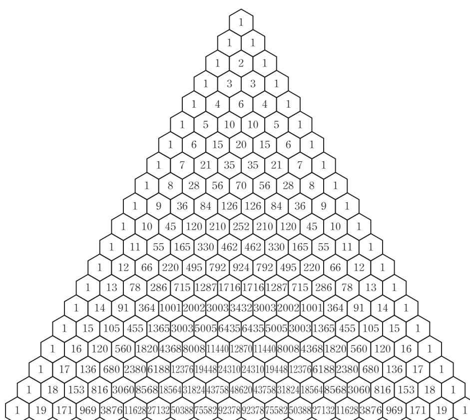
아래의 그림에 있는 각각의 칸을 다음과 같은 규칙으로 색칠하여 보자.
❶ 왼쪽과 오른쪽 끝의 1이 쓰여진 칸을 모두 색칠한다.
❷ 위에서 두 번째 줄부터는 이웃한 두 칸의 모양이 다음 4가지 중 하나가 된다.



이 4가지 모양에 대하여 다음 줄에 있는 칸을 아래의 규칙으로 색칠한다.



즉, 연속한 두 칸 중에서 한 칸이 색칠되었을 때에만 다음 줄의 가운데 칸을 색칠한다.



논술/수행평가 과제

색칠된 칸에 있는 수는 모두 홀수이다. 그 이유를 말하여 보자.

논술/수행평가 과제 / 해설

두 짝수의 합은 짝수이고, 두 홀수의 합도 짝수이다.
그러나 짝수와 홀수의 합은 홀수가 된다.
여기서 각 칸의 수는 위의 두 칸에 쓰여진 수의 합이고, 짝수와 홀수의 합일 때에만 색칠되므로 홀수가 쓰여진 칸만 색칠된다.

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.301

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{n+r-1}C_r$

01 바탕

세 개의 숫자 1, 2, 3에서 5개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

02 기본

$(x+y+z)^5$을 전개할 때, 생기는 서로 다른 항의 가짓수를 구하여라.

03 기본

세 문자 x, y, z로 만들 수 있는 4차항의 개수는?

① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

04 기본

방정식 $x+y+z=6$을 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수는?

① 8개 ② 18개 ③ 28개 ④ 38개 ⑤ 48개

05 기본

5종류의 과일을 섞어서 10개들이 과일 바구니를 만드는 경우의 수는?

① 1001가지 ② 2002가지 ③ 3003가지
④ 4004가지 ⑤ 5005가지

06 실력

12개의 과일을 담을 수 있는 바구니 한 개에 세 종류의 과일 사과, 감, 귤을 넣어 과일 바구니를 만들려고 한다. 바구니에 사과, 감, 귤을 각각을 적어도 한 개씩 넣는다고 할 때, 바구니에 12개의 과일을 채우는 경우의 수는?

① 50가지 ② 55가지 ③ 60가지
④ 65가지 ⑤ 70가지

07 기본

어느 모임의 회장 선거에 3명이 등록하였다. 회원 100명이 각각 무기명으로 한 명을 투표할 때, 투표 결과의 경우의 수는? (단, 기권과 무효는 없다.)

① 3546가지 ② 3852가지 ③ 4388가지
④ 4950가지 ⑤ 5151가지

n이 자연수일 때, $(a+b)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$

08 기본

이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+3b)^3$ (2) $(2x-3)^4$

09 기본

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$의 전개식에서 상수항을 구하여라.

10 기본

다항식 $(x+1)^2(x+2)^5$의 전개식에서 x의 계수는?

① 100　② 111　③ 122　④ 133　⑤ 144

11 기본

다항식 $(x+1)^5(3x-2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라.

12 기본

다음 식의 값은?

$${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$$

① 256　② 511　③ 512　④ 1023　⑤ 1024

13 기본

$(x^2+x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

이항정리에 $a=b=1$을 대입해 보자.

14 기본

부등식 $500<{}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_n<1000$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

$(1+x)^n$
$={}_{n}\mathrm{C}_0+{}_{n}\mathrm{C}_1x+{}_{n}\mathrm{C}_2x^2$
$+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_nx^n$

15 기본

${}_{10}\mathrm{C}_0+9{}_{10}\mathrm{C}_1+9^2{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+9^{10}{}_{10}\mathrm{C}_{10}$의 값에 있는 0의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

16 실력

집합 $A=\{x\,|\,x$는 20 이하의 음이 아닌 정수$\}$의 $\varnothing$이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수를 구하여라.

2 확률의 뜻과 활용



이 단원을 배우면

- 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하고 그 관계를 이해할 수 있다.
- 확률의 기본 성질을 이해할 수 있다.
- 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.



소단원의 학습 목표

1. 시행의 뜻을 이해한다.
2. 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해한다.
3. 수학적 확률과 통계적 확률의 관계를 이해한다.
4. 확률의 기본 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

시행, $\mathrm{P}(A)$, 수학적 확률, 통계적 확률

다가서기 / 해설

확률론은 지중해 연안에 있는 이탈리아에서 시작되어 프랑스에서 정립되었다. 그 이유는 르네상스로 인하여 지중해 연안의 항구 도시에서는 항해와 상업이 번창하였고, 이곳에 모인 사람들은 여가 시간에 주사위 또는 카드 놀이 등을 즐기는 때가 많았기 때문이다. 놀이에 대한 승률의 관심이 커지면서 확률론도 함께 발전하였던 것이다. 또한 이 시대의 계몽적 합리주의 정신은 우연적인 사건에 대해서 수학적으로 생각하는 풍조를 갖고 있었으므로 이러한 정신도 확률론을 발전시키는 원동력이 되었다.

이탈리아의 수도사인 파촐리(Pacioli, L. ; 1445~1517)는 그의 저서 '산술, 기하학, 비와 비례의 요약집(Summa de Arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita)' 에서 도박의 문제를 소개하여 확률의 시초로서 평가받고 있다. 그는 이 책에서 실력이 같은 두 경기자의 승부가 중단되었을 경우 상금을 어떻게 분배하는가에 대한 문제를 다루었다. 1654년 프랑스의 도박사인 드 메레가 파스칼에게 질문한 다가서기의 물음을 파스칼은 다음과 같이 해결하였다.

2 확률의 뜻과 활용

1 확률의 뜻과 기본 성질



학습 목표
- 시행의 뜻을 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해한다.
- 수학적 확률과 통계적 확률의 관계를 이해한다.
- 확률의 기본 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / 상금의 배분



확률론에 대한 연구는 프랑스의 드 메레(de Méré, C.)가 그의 친구이자 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)에게 질문한 다음의 물음에서 유래하였다.

"실력이 같은 두 사람이 내기를 하여 먼저 3번을 이기는 사람이 상금을 다 가져가기로 하였다. 그런데 두 사람이 각각 2번과 1번을 이긴 상태에서 내기가 중단되었다. 상금을 어떻게 나누어야 할까?"

파스칼은 이 문제를 해결하기 위하여 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)와 편지를 주고 받았고, 이러한 노력은 확률론의 기초 확립에 이바지하였다.

A가 2번, B가 1번을 이긴 상태에서 앞으로 일어날 수 있는 모든 경우는

- A가 이기는 경우
- B가 계속해서 2번 이기는 경우
- B가 이긴 다음에 A가 이기는 경우

의 3가지뿐이다.

따라서 A와 B가 각각 32프랑씩 돈을 내어 먼저 3번 이기는 사람이 64프랑을 모두 갖기로 하였다면

$$(\text{A의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=48(\text{프랑})$$

$$(\text{B의 기대금액})=64\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=16(\text{프랑})$$

이므로 A, B가 각각 48프랑, 16프랑씩 분배하는 것이 좋다.

133

01 시행의 뜻

탐구하기 / 같은 조건에서 반복 가능한 실험이나 관찰

다음은 우리 생활 주변에서 찾을 수 있는 여러 가지 실험(또는 관찰)이다. 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험(또는 관찰)을 찾아보자.

ㄱ. 개구리를 해부하여 심장의 박동을 조사한다.
ㄴ. 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사한다.
ㄷ. 어떤 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사한다.
ㄹ. 여러 곳의 밭에 품종별로 옥수수를 심고 그 수확량을 조사한다.

알아보기 / 시행의 뜻을 알아보자.

주사위 또는 동전을 던지거나 제비를 뽑는 경우와 같이, 같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간 S의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

특별한 언급이 없는 한, '주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰하는 시행'을 간단히 '주사위를 던지는 시행'이라고 한다.

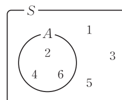
| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

이고, 이 시행의 근원사건은

$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

이다. 또 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.



스스로 하기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S를 구하여라. 또 서로 다른 면이 나오는 사건 A를 구하여라.
(단, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.)

탐구하기 / 풀이

ㄱ. 개구리마다 생체 조건이 다르므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

ㄴ. 윷을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모가 나오는 횟수를 조사하는 것은 자연 현상이나 사회 현상의 영향을 받는 것이 아니므로 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

ㄷ. 한 회사에서 생산된 형광등의 수명 시간을 조사할 때, 전압, 온도 등의 조건을 같게 하여 반복할 수 있다.

ㄹ. 밭에 옥수수를 심을 때, 올해의 강수량, 일조량 등과 작년 또는 내년의 그것 등이 같다고 할 수 없으므로 이 실험에서는 조건을 같게 할 수 없다.

따라서 조건을 같게 하여 몇 번이고 반복할 수 있는 실험(또는 관찰)은 ㄴ, ㄷ이다.

알아보기 / 해설

- 주사위를 던지거나 동전을 던지는 경우에 각각의 시행에서 어떤 결과가 나올지 정확하게 알 수는 없다. 그러나 나올 수 있는 모든 결과의 집합은 알 수 있다. 이러한 집합을 표본공간(sample space)이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건(event)이라고 한다. 또 사건에 있는 원소의 개수를 경우의 수라고 한다.
- 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간 S는 윗면에 나오는 눈의 수 전체의 집합으로

  $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

  이고, 사건은 S의 부분집합이다. 예를 들어 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$은 '짝수의 눈이 나온다.' 라는 사건이고, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$은 '6의 약수의 눈이 나온다.' 라는 사건이다.
- 또 $\{1\},\ \{2\},\ \cdots,\ \{6\}$과 같이 원소 하나로 된 사건을 근원사건(elementary event)이라고 한다.
- 한편 공집합 $\varnothing$도 사건으로 보고 이것을 공사건(null event)이라고 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

한편 서로 다른 면이 나오는 사건 A는

$A=\{\mathrm{HT},\ \mathrm{TH}\}$

탐구하기 / 풀이

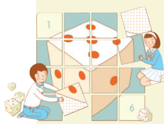
한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나오는 눈을 관찰하면 다음과 같다.



1. 나올 수 있는 눈의 수는
   1, 2, 3, 4, 5, 6
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우는
   2, 4, 6
3. 모든 경우의 수는 6가지이고, 눈의 수가 짝수인 경우의 수는 3가지이므로 구하는 확률은
   $\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

02 수학적 확률

탐 구 하 기 / 주사위 던지기



한 개의 주사위를 던지는 시행에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나올 수 있는 눈의 수를 모두 구하여라.
2. 나오는 눈의 수가 짝수인 경우를 모두 구하여라.
3. 나오는 눈의 수가 짝수일 확률을 구하여라.

알 아 보 기 / 수학적 확률의 의미를 알아보자.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 어떤 눈의 수가 나올지 정확하게 예측할 수는 없다. 그러나 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 어느 하나이므로 각 눈의 수가 나올 가능성은 모두 $\frac{1}{6}$이라고 할 수 있다.

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

P(A)의 P는 확률을 뜻하는 Probability의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 **수학적 확률**이라고 한다.

$n(A)$: 사건 A의 근원사건의 개수

특별한 언급이 없는 한, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타낸다.

| **보기** | 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)

이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 경우는 (H, H)의 한 가지이므로 두 번 모두 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽

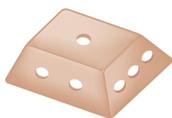
1. 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 서로 다른 면이 나올 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

- 어떤 시행의 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

- 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 수학적 확률을 이용할 수 있다.
  그런데 오른쪽 그림과 같이 정다면체 모양이 아닌 주사위에서는 1의 눈, 2의 눈, ⋯, 6의 눈이 나올 가능성이 같다고 볼 수 없다. 따라서 수학적 확률을 이용할 수 없다.



- | **보기** | 에서 표본공간을
  {HH, HT, TH, TT}
  로 나타내어도 된다.
  이때, 두 번 모두 앞면이 나오는 사건을 A라고 하면 $A=\{\mathrm{HH}\}$이므로 사건 A의 수학적 확률은
  $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

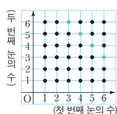
스스로 하기 / 풀이

1. 한 개의 동전을 두 번 던질 때, 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이다. 또 서로 다른 면이 나오는 사건은 {HT, TH}이므로 구하는 확률은
   $\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

함께하기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 9가 될 확률을 구하여라.

풀이



한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

이므로 $n(S)=36$이다.

또 나오는 눈의 수의 합이 9인 사건을 A라고 하면

$A=\{(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)\}$

이므로 $n(A)=4$이다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 설 때, 남학생 2명이 이웃하게 설 확률을 구하여라.

풀이

전체 학생 5명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $5!$가지

남학생 2명을 묶어서 1명으로 생각하면, 전체 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $4!$가지이고, 이 각각에 대하여 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4!2!}{5!}=\frac{2}{5}$

스스로 하기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

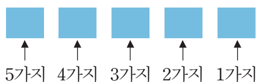
(1) 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수일 확률

(2) 나오는 눈의 수의 차가 2일 확률

3 파란색, 검은색, 빨간색 볼펜이 각각 3자루, 4자루, 3자루씩 있다. 여기서 임의로 볼펜 3자루를 뽑을 때, 빨간색 볼펜이 1자루 포함될 확률을 구하여라.

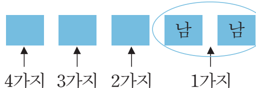
함께하기 / 해설

2 남학생 2명과 여학생 3명이 한 줄로 서는 전체 경우의 수는



$\therefore\ 5\times4\times3\times2\times1=5!$(가지)

남학생 2명을 하나로 묶어 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는



$\therefore\ 4\times3\times2\times1=4!$(가지)

그런데 ⬭ 안의 남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우가 $2!$가지 있으므로 남학생 2명이 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2!$(가지)이다.

스스로 하기 / 풀이

2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

(1) (i) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우는

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)의 1가지

(i)~(iv)에 의하여 두 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(2) 두 눈의 수의 차가 2인 경우는

(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

3 볼펜은 모두 10자루이고, 이 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

빨간색 볼펜이 1자루 포함되는 경우는 빨간색 볼펜 3자루 중 1자루를 뽑고 나머지 7자루 중 2자루를 뽑는 것이므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2=3\times\frac{7\times6}{2\times1}=63$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

탐구하기 / 풀이

답안 예시

던진 횟수(n)	10	20	30	40
앞면이 나온 횟수(r)	6	11	15	21
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.6	0.55	0.5	0.525
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.1	0.05	0	0.025
던진 횟수(n)	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)	24	30	44	54
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.48	0.5	0.55	0.54
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.02	0	0.05	0.04

03 통계적 확률

탐구하기 / 동전 던지기에서 앞면이 나오는 상대도수

한 개의 동전을 다음 표에 나타난 횟수만큼 던져 보고, 앞면이 나온 횟수와 그 상대도수 및 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차를 구하여 빈칸을 채워 보자.

던진 횟수(n)	10	20	30	40	50	60	80	100
앞면이 나온 횟수(r)								
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$								
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차								

알아보기 / 통계적 확률의 의미를 알아보자.

수학적 확률은 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다는 가정하에 정의하였지만, 자연 현상이나 사회 현상 중에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않는 경우도 흔히 있다.

이와 같은 경우는 시행을 여러 번 반복함으로써 어떤 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

일반적으로 어떤 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

그러나 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.



| 보기 | 어떤 윷을 1000번 던져서 모가 27번 나왔다면, 이 윷을 한 번 던질 때 모가 나올 통계적 확률은 $\frac{27}{1000}$로 본다.

앞의 표에서 시행 횟수 n이 점점 커지면 상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차는 점점 0에 가까워짐을 알 수 있다.

즉, 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수(통계적 확률)가 수학적 확률 $\frac{1}{2}$에 가까워짐을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

- 다음 표는 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던져서 얻은 결과이다.

던진 횟수(n)	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수(r)	204	248	298	352	392	451	498
상대도수$\left(\frac{r}{n}\right)$	0.51	0.496	0.497	0.503	0.49	0.501	0.498
상대도수와 $\frac{1}{2}$의 차	0.01	0.004	0.003	0.003	0.01	0.001	0.002

- 실제 생활에서 확률은 수학적 확률로 구할 수 없는 경우가 많다.
예를 들어 생산된 제품이 불량품일 확률, 버스가 연착할 확률, 내일 눈이 올 확률 등은 각 근원사건이 일어날 가능성이 같다고 볼 수 없으므로 수학적 확률을 구할 수 없는데 이런 경우에는 통계적 확률로 그 확률을 구해야 한다.

함 께 하 기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽



1 오른쪽 표는 우리나라에서 출생한 남녀 각각 10만 명당 나이에 따른 생존자 수를 조사하여 나타낸 것이다. 다음을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)
(1) 40세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률
(2) 60세의 여자가 앞으로 20년간 생존할 확률

2006년 생명표 (단위: 명)

나이 \ 성별	남자	여자
0세	100000	100000
20세	99029	99247
40세	97352	98348
60세	87632	94748
80세	45216	68921

〈자료 출처: http://kosis.kr〉

풀이
(1) 40세의 남자 97352명이 80세에는 45216명이 되므로 구하는 확률은
$\frac{45216}{97352}=0.464\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.46}$
(2) 60세의 여자 94748명이 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은
$\frac{68921}{94748}=0.727\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.73}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽



1 함께하기 1에 주어진 표에서 다음을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)
(1) 20세의 남자가 앞으로 40년간 생존할 확률
(2) 20세의 여자가 앞으로 60년간 생존할 확률



2 2007년 우리나라에서 신생아의 수는 496710명이었고, 그 중 쌍둥이의 수는 13537명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 구하여라.
(단, 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)



생명표, 출산 현황 등의 관련 사이트 찾아보기

생명표, 출산 현황 등은 통계청 홈페이지나 국가통계포털(KOSIS)홈페이지에서 알아볼 수 있다.
• http://kostat.go.kr • http://kosis.kr

함께하기 / 해설

1 생명표는 현재의 사망 수준이 그대로 유지된다는 가정하에 어떤 출생 집단이 연령별로 몇 세까지 살 수 있는가를 정리한 표이다.
생명표는 보건, 의료 정책 수립, 보험료율, 인명 피해 보상비 산정 등에 활용되고 있으며 장래의 인구 추계 작성, 국가 간 경제 · 사회 · 보건 수준 비교에 널리 이용되고 있다.
함께하기에 주어진 생명표는 우리나라의 2006년 생명표의 일부이다.
다음의 표는 통계청에서 2009년 12월 9일에 발표한 2008년 생명표의 일부이다. 2006년과 2008년의 생명표에서 우리나라의 평균 수명이 증가하였음을 알 수 있다.

나이 \ 성별	남자(명)	여자(명)
0	100000	100000
10	99418	99488
20	99156	99333
30	98505	98907
40	97447	98293
50	94627	97155
60	88429	94891
70	75675	89440
80	48442	71889
90	13252	30817
100^{+}	704	2810

스스로 하기 / 풀이

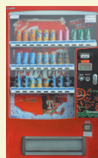
1 (1) 20세의 남자 99029명이 앞으로 40년 후인 60세에는 87632명이 되므로 구하는 확률은
$\frac{87632}{99029}=0.884\cdots$
$\fallingdotseq\mathbf{0.88}$
(2) 20세의 여자 99247명이 앞으로 60년 후인 80세에는 68921명이 되므로 구하는 확률은
$\frac{68921}{99247}=0.694\cdots$
$\fallingdotseq\mathbf{0.69}$

2 전체 496710명 중 쌍둥이가 13537명이므로 구하는 확률은
$\frac{13537}{496710}=0.027\cdots$
$\fallingdotseq\mathbf{0.03}$

138

04 확률의 기본 성질

탐구하기 / 자판기에서 음료수 뽑기



자판기에 700원, 1000원, 1500원짜리 세 종류의 음료수가 들어 있다. 각 종류의 음료수를 택하는 버튼의 개수가 같을 때, 다음을 구하여 보자.

1. 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률
3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누를 때, 음료수가 나올 확률

알아보기 / 확률의 기본 성질을 알아보자.

확률에는 어떤 성질이 있는지 알아보자.
어떤 시행에서 임의의 사건 A는 표본공간 S의 부분집합이므로

$$0\le n(A)\le n(S)$$

따라서 $0\le\dfrac{n(A)}{n(S)}\le1$이므로 확률의 정의에 의하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le1$

이때, 반드시 일어나는 사건은 S가 되므로 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$

또 절대로 일어나지 않는 사건은 $\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

(1) 임의의 사건 A에 대하여	$0\le\mathrm{P}(A)\le1$
(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여	$\mathrm{P}(S)=1$
(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여	$\mathrm{P}(\varnothing)=0$

스스로 하기 / 익힘책 105쪽 | 익힘책 106쪽 | 익힘책 107쪽

1. 어른 2명과 어린이 3명이 의자에 앉아 있다. 이 중 3명을 동시에 일어나게 할 때, 다음을 구하여라.
(1) 어린이가 3명 이하로 일어날 확률 (2) 어른 3명이 일어날 확률

탐구하기 / 풀이

1. 음료수는 700원, 1000원, 1500원짜리만 있으므로 500원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 나오는 음료수가 없다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{0}{3}=\mathbf{0}$

2. 1000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원짜리 음료수가 나올 수 있다.

따라서 구하는 확률은 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

3. 2000원을 넣고 임의로 버튼을 한 번 누르면 700원 또는 1000원 또는 1500원짜리 음료수가 나올 수 있다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{3}=\mathbf{1}$

알아보기 / 해설

임의의 사건 A가 일어날 확률의 뜻을 이해하면 확률의 기본 성질을 쉽게 이해할 수 있다. 즉,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 }A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

이고, 이때 사건 A가 일어나는 경우의 수는 0 이상이고 일어날 수 있는 모든 경우의 수보다 작거나 같기 때문에 $0\le\mathrm{P}(A)\le1$이다.

특히, $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$이다.

이때, 표본공간의 확률이 1이라는 것은 표본공간의 모든 사건이 한꺼번에 일어난다는 것이 아니라 어떤 시행을 하면 표본공간 중의 한 사건이 반드시 일어난다는 뜻이다.

한편 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$의 원소의 개수는 0이므로

$$\mathrm{P}(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) 어른이 2명뿐이므로 어린이 3명 중에서 적어도 1명은 반드시 일어난다.
따라서 어린이가 3명 이하로 일어나는 경우는 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 **1**이다.

(2) 어른이 2명뿐이므로 어른이 3명 일어나는 경우는 절대로 일어나지 않는 사건이다.
따라서 구하는 확률은 **0**이다.

139

수 학 실험실

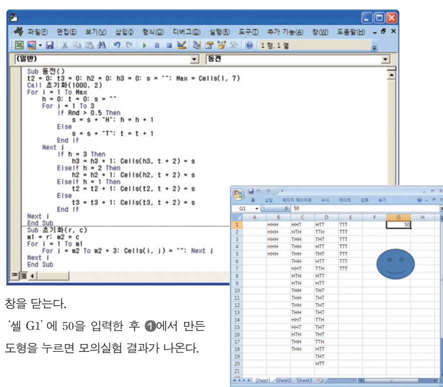
동전 던지기 모의실험

컴퓨터 프로그램을 이용하여 동전 3개를 동시에 50번 던지는 시행을 모의실험하여 보자.

❶ 메뉴 표시줄의 [삽입]−[도형]에서 도형 하나를 선택하고, 마우스를 클릭한 후 드래그하여 도형을 만든다.

❷ ❶에서 만든 도형 위에 커서를 놓고, 마우스의 오른쪽 버튼을 눌러 [매크로 지정]을 선택한다.

❸ 매크로 이름란에 '동전'을 입력하고, [새로 만들기]를 누르면 창이 뜬다. 여기에 다음 그림과 같이 입력한다.



❹ 창을 닫는다.

❺ '셀 G1'에 50을 입력한 후 ❶에서 만든 도형을 누르면 모의실험 결과가 나온다.

논술/수행평가 과제

1. 모의실험 결과로부터 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 통계적 확률을 구하고, 수학적 확률과 통계적 확률의 차이를 구하여 보자.
2. 위의 프로그램을 이용하여 동전 3개를 100번, 200번, 500번 던지는 시행을 모의실험하여 앞면이 3개 나오는 사건, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건, 앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사건, 뒷면이 3개 나오는 사건의 4가지 사건이 일어날 통계적 확률을 각각 구하고, 수학적 확률과의 차이를 구하여 보자.

수학 실험실 / 해설

통계적 확률을 구할 때에 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수로 통계적 확률을 생각한다. '동전 던지기 모의실험'을 통하여 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면서 통계적 확률을 구하고, 그것을 수학적 확률과 비교할 수 있다.

논술/수행평가 과제 / 해설

1. 위의 실험에서 시행 횟수 $n=50$이고, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 경우의 수는 18회이다.

따라서 구하는 통계적 확률은 $\frac{18}{50}=0.36$이다.

한편 동전 3개를 동시에 던졌을 때, 표본공간 S는

$S=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$

이때, 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나오는 사건은 $\{HHT,\ HTH,\ THH\}$이므로 구하는 수학적 확률은 $\frac{3}{8}=0.375$이다.

따라서 수학적 확률과 통계적 확률의 차이는 $0.375-0.36=0.015$이다.

2. 동전 3개를 동시에 던졌을 때,

앞면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은

$\frac{1}{8}=0.125$

앞면이 1개, 뒷면이 2개 나오는 사건의 수학적 확률은

$\frac{3}{8}=0.375$

뒷면이 3개 나오는 사건의 수학적 확률은

$\frac{1}{8}=0.125$

다음 예에서 n이 커질수록 통계적 확률과 수학적 확률의 차가 줄어든다는 것을 알 수 있다.

던진 횟수(n)		100	200	500
앞면: 3	나온 횟수	10	20	51
	통계적 확률	0.1	0.1	0.102
수학적 확률과의 차		0.025	0.025	0.023
앞면: 2 뒷면: 1	나온 횟수	33	75	186
	통계적 확률	0.33	0.375	0.372
수학적 확률과의 차		0.045	0	0.003
앞면: 1 뒷면: 2	나온 횟수	41	77	200
	통계적 확률	0.41	0.385	0.4
수학적 확률과의 차		0.035	0.01	0.025
뒷면: 3	나온 횟수	16	28	63
	통계적 확률	0.16	0.14	0.126
수학적 확률과의 차		0.035	0.015	0.001

소단원의 학습 목표

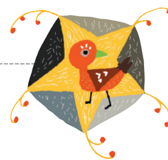
1. 배반사건의 뜻을 안다.
2. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 여사건의 뜻을 안다.
4. 여사건의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

배반사건, 여사건

2 확률의 뜻과 활용

2 확률의 계산과 활용



학습 목표

- 배반사건의 뜻을 알고, 확률의 덧셈정리를 이해한다.
- 여사건의 뜻을 알고, 여사건의 확률을 이해한다.

다 가 서 기 / 생일이 같은 사람이 있을 확률



한 반의 학생 수가 35명일 때, 생일이 같은 학생이 있을 확률을 구하여 보자.

1년을 366일로 생각하면 두 명의 학생이 있을 때, 두 학생의 생일이 다를 확률은 $\frac{365}{366}$이다.

세 명의 학생이 있을 때, 세 학생의 생일이 다를 확률은 세 번째 학생이 앞의 두 명과 생일이 달라야 하므로 $\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}$이다. 마찬가지 방법으로 하면 35명의 생일이 모두 다를 확률은 다음과 같다.

$$\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}\fallingdotseq 0.1865$$

따라서 이 반에서 생일이 같은 학생이 나올 확률은 다음과 같다.

$$1-\frac{365}{366}\times\frac{364}{366}\times\cdots\times\frac{332}{366}\fallingdotseq 0.8135$$



다가서기 / 해설

우연히 만난 두 명의 생일이 같을 확률은 $\frac{1}{366}\fallingdotseq 0.0027$이다. 이것은 어떤 사람이 길을 걸어가면서 우연히 만난 1000명에게 생일을 물어볼 때, 2~3명이 나와 생일이 같을 수 있다는 것을 의미한다.

그러면 어느 가족 4명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 어떻게 구할까?

이것은 두 명의 생일이 같을 확률, 세 명의 생일이 같을 확률, 네 명의 생일이 같을 확률을 구하여 더하면 된다. 그런데 이 방법은 계산이 복잡하므로, 네 명 모두 생일이 다를 확률을 구하여 1에서 이 값을 빼면 된다.

일반적으로 n명$(n\le 366)$이 있을 때, 이들이 모두 생일이 다를 확률을 p라고 하면

$$p=\left(1-\frac{1}{366}\right)\left(1-\frac{2}{366}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{366}\right)$$

n이 여러 가지 값을 가질 때 확률 p의 값을 구하면 다음 표와 같다.

n	p	$1-p$
2	0.9973	0.0027
4	0.9837	0.0163
10	0.8834	0.1166
20	0.5894	0.4106
40	0.1095	0.8905
60	0.0060	0.9940
80	0.0001	0.9999
100	0.0000003	0.9999997

위의 표에서 보는 바와 같이, 4명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 약 1.6 % 정도로 매우 작지만, 80명 중에서 생일이 같은 사람이 있을 확률은 99.99 %이다. 또, 100명 이상의 사람이 있으면, 이들 중에는 생일이 같은 사람들이 거의 틀림없이 있다고 보아도 될 것이다.

01 확률의 덧셈정리

탐 구 하 기 / 동전의 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 다음을 구하여 보자.

1. 두 번 모두 앞면이 나오는 사건 A
2. 두 번 모두 뒷면이 나오는 사건 B
3. 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건 C
4. $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap C$

알 아 보 기 / 배반사건에 대하여 알아보자.

두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$로 나타내고, A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$로 나타낸다.

또 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 **배반사건**이라고 한다.

| 보기 | 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{1,\ 3\}$$

이다.

여기서 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1. 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자. 사건 A와 서로 배반인 사건을 모두 구하여라.

탐구하기 / 풀이

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$

1. 두 번 모두 앞면이 나오는 것은 HH이므로

$A=\{\mathbf{HH}\}$

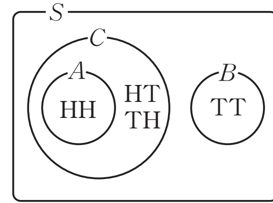
2. 두 번 모두 뒷면이 나오는 것은 TT이므로

$B=\{\mathbf{TT}\}$

3. 앞면이 적어도 한 번 나오는 것은 두 번 모두 앞면이 나오거나 한 번은 앞면, 한 번은 뒷면이 나오는 것이다.

$\therefore\ C=\{\mathbf{HH,\ HT,\ TH}\}$

4. 위의 표본공간 S와 세 사건 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore A\cap B=\varnothing,\ B\cap C=\varnothing,$

$A\cap C=\{\mathbf{HH}\}$

알아보기 / 해설

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 하였다.

따라서 사건을 나타낼 때에 집합에서 쓰는 기호를 사용하면 매우 편리하다.

이런 뜻에서, 서로 배반인 두 사건 A, B를

$$A\cap B=\varnothing$$

으로 정의하는 것은 자연스러운 일이다.

스스로 하기 / 풀이

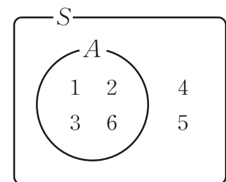
1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간은

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

또 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 사건 A는

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

표본공간 S와 사건 A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



사건 A와 서로 배반인 사건은 A와 공통 부분이 없어야 하므로 $S-A=\{4,\ 5\}$의 부분집합을 찾으면 된다. 즉,

$\varnothing$, $\{\mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{4,\ 5}\}$

알아보기 / 해설

표본공간, 사건 등을 집합과 연결지어 생각하면 확률을 계산하는 데 편리하다.

표본공간 또는 전체 사건	⟷	전체집합
사건	⟷	부분집합
합사건	⟷	합집합
공사건	⟷	공집합
여사건	⟷	여집합

알아보기 / 확률의 덧셈정리에 대하여 알아보자.

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립하므로 사건 $A\cup B$가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

스스로 하기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽



2 어느 마을에서 포도를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{3}{5}$, 배를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{2}$이고 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{5}$이다. 이 마을에서 한 가구를 임의로 택할 때, 그 가구가 포도 또는 배를 재배할 확률을 구하여라.

3 빨간 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색일 확률을 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

2 포도를 재배하는 가구가 택해질 사건을 A, 배를 재배하는 가구가 택해질 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

이때, 포도와 배를 모두 재배하는 가구는 $A\cap B$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{9}{10}}$$

3 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개가 모두 같은 색의 공이 나오려면 3개 모두 빨간 공이 나오거나 3개 모두 검은 공이 나와야 한다.

이때, 3개 모두 빨간 공이 나오는 사건을 A, 3개 모두 검은 공이 나오는 사건을 B라고 하자.

10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 $\quad {}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

(i) 3개 모두 빨간 공이 나오는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3=4$(가지)

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

(ii) 3개 모두 검은 공이 나오는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$(가지)

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

그런데 두 사건 A, B는 동시에 일어날 수 없으므로 $A\cap B=\varnothing$이다.

따라서 구하는 확률은

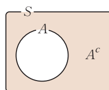
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{6}{30}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

143

02 여사건의 확률

알 아 보 기 / 여사건의 확률에 대하여 알아보자.

어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.



이제 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 구하여 보자.

$A\cup A^C=S$, $A\cap A^C=\varnothing$이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

여사건의 확률

임의의 사건 A에 대하여 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

함 께 하 기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률을 구하여라.

풀이

적어도 1명은 여자일 사건을 A라고 하자. 이때, A^C은 여자가 1명도 뽑히지 않는 사건, 즉 2명 모두 남자일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

따라서 2명의 대표를 뽑을 때, 적어도 1명은 여자일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 111쪽 | 익힘책 112쪽 | 익힘책 113쪽



1 흰색 초콜릿 3개와 밤색 초콜릿 7개가 들어 있는 상자에서 3개의 초콜릿을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

여사건에 대한 확률을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

표본공간 S와 사건 A에 대하여

$A^C=S-A$

$n(A^C)=n(S)-n(A)$

$$\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{n(S)}{n(S)}-\frac{n(A)}{n(S)}$$

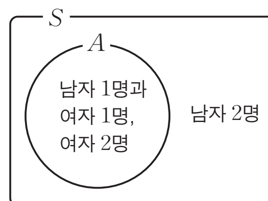
$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

참고 | A^C

여사건을 영어로 complementary event라고 한다. 그래서 complementary의 첫 글자 c를 어깨에 써서 여사건을 나타낸다.

함께하기 / 해설

1 4명의 남자와 3명의 여자 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 모든 경우는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(\text{남자 1명과 여자 1명})\\&\quad+\mathrm{P}(\text{여자 2명})\\&=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\\&=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

이와 같이 남자 1명과 여자 1명일 사건의 확률, 여자 2명일 사건의 확률을 각각 구하여 확률의 덧셈정리를 이용할 수도 있지만 본문의 풀이와 같이 여사건의 확률을 이용하는 것이 더 간단하게 구할 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 적어도 1개가 흰색 초콜릿일 사건을 A라고 하면 A^C은 흰색 초콜릿이 한 개도 없는 사건, 즉 초콜릿 3개가 모두 밤색 초콜릿일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}}=\frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{24}=\mathbf{\frac{17}{24}}$$

중단원 확인하기 / 풀이

1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나올 수 있는 눈의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6

의 6가지

나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우는

1, 2, 3, 6

의 4가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

2 (1) 전체 구슬에서 2개를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2$가지

노란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) 전체 구슬에서 4개를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4$가지

노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}=\mathbf{\frac{3}{7}}$$

3 어느 지역 주민 5만 명 중 환경 보호 단체의 회원이 625명이므로 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 통계적 확률은

$\frac{625}{50000}=\mathbf{\frac{1}{80}}$

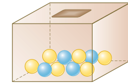
중 단 원 확 인 하 기

새로 나온 용어와 기호
시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 배반사건, 여사건, P(A)

IV _2. 확률의 뜻과 활용

수학적 확률 — 이해
1 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 눈의 수가 6의 약수일 확률을 구하여라.

수학적 확률 — 이해
2 노란 구슬 6개와 파란 구슬 4개가 들어 있는 상자가 있다. 다음을 구하여라.



(1) 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 2개가 모두 노란 구슬일 확률
(2) 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 노란 구슬 2개, 파란 구슬 2개가 나올 확률

통계적 확률 — 문제 해결
3 어느 지역 주민 5만 명 중에서 625명이 환경 보호 단체의 회원이라고 한다. 이 지역 주민 1명을 택하였을 때, 그 사람이 환경 보호 단체의 회원일 확률을 구하여라.



확률의 계산 — 이해
4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.
(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나올 확률
(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 될 확률
(3) 두 눈의 수의 차가 3이 될 확률
(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률

혈액형 — 의사소통
5 어떤 모임에 10명이 참석하였는데 이들 중 3명의 혈액형이 A형이라고 한다. 이들 중 두 명을 임의로 택할 때, 다음을 구하여라.
(1) 두 명이 모두 A형일 확률
(2) 적어도 한 명이 A형일 확률

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나올 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) 두 번 모두 같은 눈의 수가 나오는 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3),
(4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(2) 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 4 또는 8 또는 12인 경우이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)

의 3가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

의 5가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)

의 1가지

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{36}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(3) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6),

(4, 1), (5, 2), (6, 3)

의 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) 두 눈의 수의 합이 3 이상인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 눈의 수의 합이 3 미만, 즉 두 눈의 수의 합이 2인 사건이다.

두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)

의 1가지이므로

$P(A^C)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{1}{36}$

$=\mathbf{\frac{35}{36}}$

5 (1) 전체 10명 중 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2$가지

A형인 3명 중 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_{3}C_2$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_{3}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

(2) 택한 두 명 중 적어도 한 명이 A형인 사건을 A라고 하면 A^C은 택한 두 명이 모두 A형이 아닌 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{7}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{7\times6}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{7}{15}=\mathbf{\frac{8}{15}}$

| **다른 풀이** |

택한 두 명 중 적어도 한 명이 A형인 경우는 한 명만 A형인 경우 또는 두 명 모두 A형인 경우이다.

(i) 한 명만 A형인 경우는

A형인 3명 중 한 명을 택하고 A형이 아닌 7명 중 한 명을 택하는 경우이므로 그 경우의 수는

${}_{3}C_1\times{}_{7}C_1$(가지)

따라서 확률은

$$\frac{{}_{3}C_1\times{}_{7}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{3\times7}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{7}{15}$$

(ii) 두 명 모두 A형인 경우의 수는

${}_{3}C_2$가지

따라서 확률은

$$\frac{{}_{3}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{1}{15}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.303

01 기본

triangle을 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열할 때, 모음이 모두 홀수 번째 자리에 올 확률은?

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{2}{21}$

02 기본

여학생 2명과 남학생 2명을 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 남학생이 양쪽 끝에 서게 될 확률
(2) 여학생과 남학생이 번갈아 가며 서게 될 확률
(3) 여학생끼리 이웃하여 서게 될 확률

1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼낸다.

03 실력

주머니 속에 1부터 10까지의 번호가 하나씩 적힌 같은 크기의 공 10개가 들어 있다. 이 중에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나온 번호의 최댓값이 6이 될 확률은?



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04 실력

10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 4개, 100원짜리 동전 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 6개의 동전을 꺼낼 때, 금액의 합이 500원 이상일 확률을 구하여라. (단, 각각의 동전이 뽑힐 확률은 같다.)

05 기본

어느 프로야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.295였다. 이 선수가 이번 시즌에 200 타석에서 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.

06 기본

주머니 속에 흰 공이 3개, 빨간 공이 4개, 노란 공이 n개 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 1000번 반복하였더니 그중 흰 공이 250번 나왔다. 이때, n의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

07 바탕

흰 공 3개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 꺼낸 두 공의 색이 같을 확률

(2) 꺼낸 두 공의 색이 다를 확률

08 기본

표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 두 사건 A, B가 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{6,\ 7\}$일 때, 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건의 개수를 구하여라.

09 바탕

1부터 300까지의 자연수 중에서 하나의 수를 임의로 뽑을 때, 그 수가 다음과 같을 확률을 구하여라.

(1) 3의 배수
(2) 4의 배수
(3) 3의 배수 또는 4의 배수

10 바탕

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수의 합이 6 또는 8일 확률
(2) 나오는 눈의 수의 합이 3 이하이거나 11 이상일 확률

11 기본

10개의 제비 중에서 당첨 제비가 3개 들어 있다. 갑, 을의 순서로 제비를 하나씩 뽑을 때, 다음을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

(1) 갑이 당첨될 확률
(2) 갑과 을이 모두 당첨될 확률
(3) 갑은 당첨되지 않고, 을이 당첨될 확률
(4) 을이 당첨될 확률

세 사람이 비기는 경우는 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 내는 경우이다.

12 기본

세 사람이 가위바위보를 할 때, 비길 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13 기본

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14 실력

5개의 검은 공과 3개의 흰 공이 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣은 다음, 다시 1개의 공을 꺼내어 색을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 공의 색이 같을 확률 (2) 두 공의 색이 다를 확률

'적어도~' 라는 문구가 나오면 여사건의 확률을 이용한다.

15 기본

남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 적어도 한쪽 끝에는 여학생이 서는 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

16 실력

주머니 속에 같은 크기의 흰 구슬, 노란 구슬이 모두 10개 들어 있다. 이 중에서 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 적어도 1개가 노란 구슬일 확률이 $\frac{8}{15}$이다. 이때, 노란 구슬의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

3 조건부확률

이 단원을 배우면

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

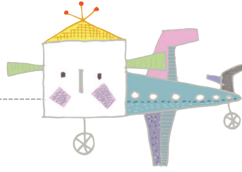


1 조건부확률과 확률의 곱셈정리

146

3 조건부확률

1 조건부확률과 확률의 곱셈정리



학습 목표
- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
- 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

다 가 서 기 / **당첨 제비뽑기**



제비를 뽑을 때, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑으면 나중에 뽑는 사람은 불리하고, 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑지 못하면 나중에 뽑는 사람이 유리하다.

그러나 먼저 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 수도 있고 뽑지 못할 수도 있으므로 결과적으로는 두 사람 모두 당첨 제비를 뽑을 확률은 같다.

소단원의 학습 목표

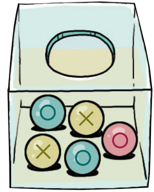
1. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
2. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
4. 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

조건부확률, $\mathrm{P}(B|A)$, **독립**, **종속**, **독립시행**

다가서기 / 해설

오른쪽 그림과 같이 당첨 제비를 ◯로, 당첨 제비가 아닌 것을 ×로 나타내자.

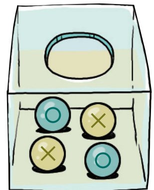


오른쪽 상자에서 어떤 사람이 먼저 한 개를 뽑을 때, 그것이 당첨 제비(◯)일 확률은 $\frac{3}{5}$

이제 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비(◯)를 뽑을 확률을 구하여 보자.

(i) 먼저 뽑은 사람이 당첨 제비를 뽑은 경우

이 경우에는 상자에 당첨 제비가 2개, 당첨 제비가 아닌 것이 2개 남아 있다.



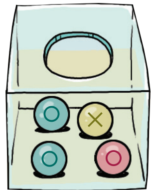
그러므로 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

- $\frac{3}{5}$: 처음 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률
- $\frac{2}{4}$: 나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률

(ii) 먼저 뽑은 사람이 당첨 제비를 뽑지 못한 경우

이 경우에는 상자에 당첨 제비가 3개, 당첨 제비가 아닌 것이 1개 남아 있다.



그러므로 나중에 뽑는 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

- $\frac{2}{5}$: 처음 사람이 당첨 제비를 뽑지 못할 확률
- $\frac{3}{4}$: 나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률

따라서 나중 사람이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

탐구하기 / 풀이

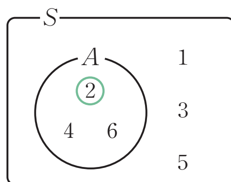
한 개의 주사위를 던질 때의 표본공간 S는

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

1. 나온 눈의 수가 짝수이면서 소수인 것은 2 하나 뿐이다.

   따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

2. 짝수가 나올 사건을 A라고 하면 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이고, 여기서 소수인 것은 2뿐이다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{n(\{2\})}{n(\{2,\ 4,\ 6\})}=\frac{1}{3}$$

[참고] 짝수가 나왔을 때 그것이 소수일 확률을 구하는 것과 같이 '…일 때' 라는 조건이 붙으면 '…'을 표본공간 전체로 보면 된다.

01 조건부확률의 뜻

탐 구 하 기 / 조건이 주어진 확률 구하기

한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여 보자.



1. 나온 눈의 수가 짝수이면서 소수일 확률
2. 짝수가 나왔을 때, 그것이 소수일 확률

알 아 보 기 / 조건부확률의 뜻을 알아보자.



오른쪽 표는 어느 풍물패 동아리의 회원 구성을 나타낸 것이다.

	1학년	2학년	합계
남자	10	6	16
여자	7	7	14
합계	17	13	30

회원 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 남자가 선택되었다. 이 사람이 2학년일 확률을 구하여 보자.

한 명을 뽑을 때 전체 사건을 S, 뽑힌 사람이 남자일 사건을 A, 2학년일 사건을 B라고 하면

$$n(S)=30,\ n(A)=16,\ n(B)=13,\ n(A\cap B)=6$$

따라서 회원 중에서 한 명을 뽑을 때 뽑힌 사람이 2학년 남자일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{6}{30}$$

그러나 뽑힌 사람이 남자일 때, 그 사람이 2학년일 확률은

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{16}$$

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

이다.

알아보기 / 해설

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 표본공간으로 생각하는 확률이다.

따라서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 것은 전체적으로는 $A\cap B$와 같은 것이다.

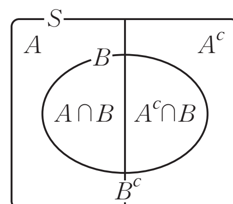
즉, 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 표본공간으로 생각할 때, 사건 $A\cap B$의 확률이다.

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 일반적으로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

보충 학습

표본공간 S의 근원사건이 같은 정도로 일어날 것으로 기대될 때, 오른쪽 그림에서



$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

한편

$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

함 께 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

1 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 소수일 때, 그것이 홀수일 확률을 구하여라.

풀이

소수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$, $A\cap B=\{3,\ 5\}$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

1 오른쪽 표는 어느 동아리 학생 30명에 대하여 안경을 쓴 학생의 수를 남녀별로 조사한 것이다. 다음을 구하여라.

(단위: 명)

	안경 씀	안경 안 씀	합계
남학생 수	6	10	16
여학생 수	5	9	14
합계	11	19	30

(1) 여학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 안경을 쓴 학생일 확률

(2) 안경을 안 쓴 학생 중에서 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 남학생일 확률

2 CD를 만드는 두 회사 A, B의 제품 불량률은 각각 2 %와 3 %이다. 두 회사 A, B의 CD가 각각 100장씩 섞여 있는 상자 안에서 1장을 꺼냈더니 불량품이었다. 이 불량품이 A 회사의 제품일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

$\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(A|B)$를 혼동하지 않아야 한다. 즉, $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 말하고, $\mathrm{P}(A|B)$는 사건 B가 일어났을 때, 사건 A가 일어날 확률을 말한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)\neq 0)$$

스스로 하기 / 풀이

1 여학생이 뽑히는 사건을 F, 남학생이 뽑히는 사건을 M, 안경을 쓴 학생이 뽑히는 사건을 G, 안경을 안 쓴 학생이 뽑히는 사건을 N이라고 하자.

(1) 구하는 확률은 사건 F가 일어났을 때의 사건 G의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(G|F)=\frac{\mathrm{P}(G\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{14}{30}}=\mathbf{\frac{5}{14}}$$

(2) 구하는 확률은 사건 N이 일어났을 때의 사건 M의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(M|N)=\frac{\mathrm{P}(M\cap N)}{\mathrm{P}(N)}=\frac{\frac{10}{30}}{\frac{19}{30}}=\mathbf{\frac{10}{19}}$$

2 A 회사의 제품이 나오는 사건을 A, 불량품이 나오는 사건을 D라고 하자.

A 회사의 제품 100장 중에는 불량품이 2장, B 회사의 제품 100장 중에는 불량품이 3장 들어 있으므로

$$\mathrm{P}(D)=\frac{5}{200},\ \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{2}{200}$$

구하는 확률은 사건 D가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(A|D)=\frac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{2}{200}}{\frac{5}{200}}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

알아보기 / 해설

조건부확률의 정의에서 다음과 같은 확률의 곱셈정리를 얻는다.

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 에서

$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)$ ……㉠

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ 에서

$\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

149

02 확률의 곱셈정리

알 아 보 기 / 확률의 곱셈정리를 알아보자.

조건부확률의 정의에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 알 수 있다.
또한 A, B를 바꾸어 생각하면 다음의 곱셈정리를 얻는다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

(단, $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$)

함 께 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽



1. 10개의 송편 중에서 4개에는 콩이 들어 있고 6개에는 깨가 들어 있다. 이 중에서 두 개의 송편을 먹을 때, 첫 번째는 깨가 들어 있는 송편을 먹고 두 번째는 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률을 구하여라.

풀이

첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라고 하면, 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{9}$

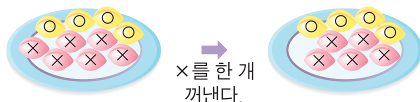
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

1. 흰색 탁구공 4개와 노란색 탁구공 8개가 들어 있는 상자에서 탁구공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째는 흰색 탁구공이 나오고 두 번째는 노란색 탁구공이 나올 확률을 구하여라.
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

함께하기 / 해설

1. 콩이 들어 있는 송편을 ○, 깨가 들어 있는 송편을 ×라고 표시하자. 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹으면 남아 있는 송편은 | 그림2 | 와 같아진다.



| 그림1 | | 그림2 |

한편 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹는 사건을 A, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

또 $\mathrm{P}(B|A)$는 첫 번째에 깨가 들어 있는 송편을 먹었을 때, 두 번째에 콩이 들어 있는 송편을 먹을 확률이다.

스스로 하기 / 풀이

1. 첫 번째에 흰색 탁구공이 나오는 사건을 A라고 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

두 번째에 노란색 탁구공이 나오는 사건을 B라고 하면 첫 번째에 흰색 탁구공이 나왔을 때, 두 번째에 노란색 탁구공이 나올 확률은 (흰색 탁구공을 하나 꺼냈으므로 흰색 탁구공이 3개, 노란색 탁구공이 8개가 남아 있다.)

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{8}{11}$

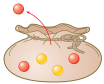
따라서 구하는 확률은

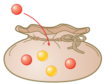
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{11}=\mathbf{\frac{8}{33}}$$

150

03 사건의 독립과 종속

알 아 보 기 / 사건의 독립과 종속에 대하여 알아보자.





같은 크기의 노란 공 2개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번 꺼내는 경우를 생각하자. 첫 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 다음을 알아보자.

(ⅰ) 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

(ⅱ) 꺼낸 공을 다시 넣을 때

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 일반적으로 $\mathrm{P}(B)$와 같지 않다. 그러나

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\ \ (\text{또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A))$$

가 성립할 때, 즉 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는(또는 사건 B가 일어나는 것이 사건 A가 일어나는) 확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 **독립**이라고 한다.

또 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 **종속**이라고 한다.

한편 독립인 두 사건 A, B에 대하여 확률의 곱셈정리를 적용하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(B)\neq0$이면 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$이다.

(ⅱ)에서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이고 (ⅰ)에서 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

독립인 사건에 대한 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

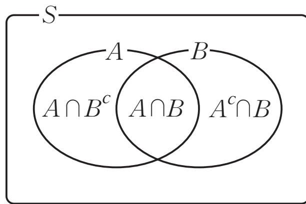
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

알아보기 / 해설

- 다음 벤 다이어그램에서 보는 바와 같이

$$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$$

이고 $A\cap B$와 $A^C\cap B$는 공통 부분이 없다.



$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}\{(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\}\\&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\end{aligned}$$

- 조건부확률에서 일반적으로 $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$는 서로 같지 않다. 그러나 이들이 서로 같을 때가 있다.

보충 학습

1. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$의 뜻은 사건 A가 일어나든, 일어나지 않든 사건 B가 일어날 확률이 같다는 것이다. 즉, 사건 B가 사건 A에 대하여 독립이다.

한편 사건 B가 사건 A에 대하여 독립이면 사건 A가 사건 B에 대하여 독립이다. 즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

2. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

임을 증명하여 보자.

증명

$(\Longrightarrow)$ $$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$$

$(\Longleftarrow)$ $$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

3. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

임을 증명하여 보자.

증명

$(\Longrightarrow)$ $$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$(\Longleftarrow)$ $$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $A\cap B=\{2\}$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$이므로

$$P(A)P(B)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(2) $A\cap C=\varnothing$이므로

$$P(A\cap C)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$이므로

$$P(A)P(C)=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

함 께 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

1 1에서 10까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 자연수를 택할 때, 짝수가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 나오는 사건을 B, 5의 배수가 나오는 사건을 C라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 종속임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 독립임을 보여라.

풀이

세 사건 A, B, C는 각각 다음과 같다.

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},\ B=\{3,\ 6,\ 9\},\ C=\{5,\ 10\}$$

(1) $A\cap B=\{6\}$이므로 $\quad P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{10}$이므로 $\quad P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{10\}$이므로 $\quad P(A\cap C)=\frac{1}{10}$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{5}$이므로 $\quad P(A)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

1 정사면체의 각 면에 1, 2, 3, 4가 적혀 있다. 이 정사면체를 던져서 밑면에 있는 수를 관찰할 때, 세 사건

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3\},\ C=\{3,\ 4\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A, B는 서로 독립임을 보여라.

(2) 두 사건 A, C는 서로 종속임을 보여라.



2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째는 소수의 눈이 나오고 두 번째는 합성수의 눈이 나올 확률을 구하여라.

2 주사위를 두 번 던질 때의 표본공간 S는

$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (1,\ 6),$
$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 6),$
$\vdots$
$(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}$

이고, 그 원소의 개수는 $6\times 6=36$(개)이다.

6 이하의 소수는 2, 3, 5이고 합성수는 4, 6이므로 첫 번째에 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 두 번째에 합성수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$A=\{(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 6),$
$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 6),$
$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 6)\}$

$B=\{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ \cdots,\ (6,\ 4),$
$(1,\ 6),\ (2,\ 6),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}$

$A\cap B=\{(2,\ 4),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),$
$(5,\ 4),\ (5,\ 6)\}$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

[참고]

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$이고

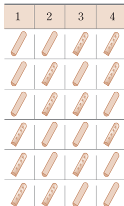
$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립임을 알 수 있다.

04 독립시행

알아보기 / 독립시행의 뜻과 그 확률을 알아보자.

동전 또는 주사위를 던지거나 뽑은 제비를 되돌려 놓고 다시 뽑는 경우 등과 같이 각각 같은 조건으로 반복되고 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않는 시행을 **독립시행**이라고 한다.

윷짝의 앞면: 평평한 면
윷짝의 뒷면: 볼록한 면



앞면이 나올 확률이 $\frac{3}{5}$인 윷짝 한 개를 던지는 시행을 4번 할 때, 윷짝의 앞면이 2번 나올 확률을 생각해 보자.

윷짝의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 앞면 2번, 뒷면 2번이 차례로 나올 확률은 $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2$이다. 그런데 4번의 시행에서 윷짝의 앞면이 2번 나오는 경우의 수는 ${}_4C_2$가지이고, 이들 ${}_4C_2$가지의 경우가 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$ {}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625} $$

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

> **독립시행의 확률**
>
> 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는
>
> $P_r={}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q=1-p$, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

| **보기** | 어떤 클레이 사격 선수의 평균 명중률이 90 %라고 한다. 이 선수가 4발을 쏘았을 때, 3발 이상 명중시킬 확률은

$$ {}_4C_3\left(\frac{9}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{9}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^0=\frac{2916+6561}{10000}=\frac{9477}{10000} $$

클레이 사격
점토로 구워 만든 접시를 투사기로 쏘아 올려 산탄총으로 하나씩 사격하여 깨뜨린 접시의 수로 승부를 겨루는 경기

스스로 하기 / 익힘책 119쪽 | 익힘책 120쪽 | 익힘책 121쪽

① 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 눈의 수가 3 또는 6이 나오는 경우가 적어도 2번일 확률을 구하여라.

알아보기 / 해설

- 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 시행의 결과와 두 번째 시행의 결과는 서로 독립이다.
  예를 들어 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 두 번째에 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$에서
  $$ P(A\cap B)=P(A)P(B) $$
  이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
  이와 같이 주사위 또는 동전을 던지거나, 복원추출의 경우에는 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과와 서로 독립이다. 이런 뜻에서 이러한 시행들을 독립시행이라고 한다.
- 독립시행의 확률을 구할 때는 각 사건이 일어날 확률을 구하고, n번의 독립시행에서 그 경우가 몇 번 일어나는지를 생각해야 한다.

스스로 하기 / 풀이

1 주사위를 한 번 던져서 3 또는 6의 이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

3 또는 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률은

$$ {}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81} \quad \cdots\cdots ㉠ $$

3 또는 6의 눈이 한 번만 나올 확률은

$$ {}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81} \quad \cdots\cdots ㉡ $$

㉠, ㉡에서 구하는 확률은

$$ 1-\left(\frac{16}{81}+\frac{32}{81}\right)=1-\frac{48}{81}=\mathbf{\frac{11}{27}} $$

| 다른 풀이 |

3 또는 6의 눈이 2번 나올 확률은

$$ {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81} \quad \cdots\cdots ㉠ $$

3 또는 6의 눈이 3번 나올 확률은

$$ {}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81} \quad \cdots\cdots ㉡ $$

3 또는 6의 눈이 4번 나올 확률은

$$ {}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81} \quad \cdots\cdots ㉢ $$

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 확률은

$$ \frac{24}{81}+\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{33}{81}=\frac{11}{27} $$

중단원 확인하기 / 풀이

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
조건부확률, 독립, 종속, 독립시행, $\mathrm{P}(B|A)$

조건부확률 — 계산

1 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립할 때, $\mathrm{P}(A|B)$를 각각 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C \cup B^C)=0.7$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.8$, $\mathrm{P}(B)=0.2$, $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=0.1$

확률의 곱셈정리 — 이해

2 어떤 수학 문제를 A, B, C 세 사람이 맞힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$이다. 이 문제를 세 명이 모두 맞힐 확률을 구하여라.

독립과 종속 — 추론

3 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 두 눈의 수의 합이 소수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 홀수인 사건을 B라고 하자. 두 사건 A, B는 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.

독립시행의 확률 — 문제 해결

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히는 학생이 있다. 5문제가 출제된 어떤 시험에서 3문제 이상을 맞히면 합격이라고 할 때, 이 학생이 시험에 합격할 확률을 구하여라.

과일의 분류 — 의사소통

5 어느 과수원에서는 과일을 상품과 중품 두 가지로 판정하여 분류하고 있다. 이때, 상품을 상품으로 판정할 확률은 90 %, 중품을 중품으로 판정할 확률은 80 %이다. 상품 600개와 중품 400개가 섞여 있는 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률을 구하여라.

---

1 (1) $\mathrm{P}(A^C \cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=0.7$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-0.7=0.3$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.3}{0.4}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

(2) $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=0.1$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-0.1=0.9$$

또

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=0.8+0.2-0.9=0.1$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.1}{0.2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

2 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B, C가 문제를 맞히는 사건을 C라고 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

두 눈의 수의 합이 소수인 사건 A는

$A=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$

에서 15가지이므로 그 확률은

$P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

두 눈의 수의 합이 홀수인 사건 B는

$B=\{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (5, 6), (6, 5)\}$

에서 18가지이므로 그 확률은

$P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

또 두 눈의 수의 합이 소수이면서 홀수인 사건 $A\cap B$는

$A\cap B=\{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$

에서 14가지이므로 그 확률은

$P(A\cap B)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

이때, $P(A)P(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 **종속**이다.

4 4문제를 풀면 3문제를 맞히므로 한 문제에 대하여 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$이다. 이때, 이 시험에 합격하려면 5문제 중에서 3문제 이상을 맞혀야 하므로 3문제 또는 4문제 또는 5문제를 맞혀야 한다.

3문제를 맞힐 확률은

${}_5C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$

4문제를 맞힐 확률은

${}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1$

5문제를 맞힐 확률은

${}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$

따라서 이 학생이 시험에 합격할 확률은

${}_5C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$

$=10\times\frac{27}{1024}+5\times\frac{81}{1024}+\frac{243}{1024}$

$=\frac{918}{1024}=\mathbf{\frac{459}{512}}$

5 과일 더미에서 임의로 한 개를 고를 때, 고른 과일이 상품인 사건을 A, 고른 과일을 상품으로 판정하는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}$

고른 과일이 상품이고 그 과일을 상품으로 판정할 확률은

$P(A\cap B)=\frac{600}{1000}\times\frac{90}{100}$

고른 과일이 중품이고 그 과일을 상품으로 판정할 확률은

$P(A^C\cap B)=\frac{400}{1000}\left(1-\frac{80}{100}\right)$

$\therefore P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$

$=\frac{600}{1000}\times\frac{90}{100}+\frac{400}{1000}\left(1-\frac{80}{100}\right)$

$=\frac{27}{50}+\frac{4}{50}=\frac{31}{50}$

따라서 과일 더미에서 임의로 한 개를 골라 상품이라고 판정하였을 때, 이 과일이 실제로 상품일 확률은

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{\frac{27}{50}}{\frac{31}{50}}=\mathbf{\frac{27}{31}}$

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.306

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

01 바탕

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어날 확률이 0.6이고, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률이 0.35라고 한다. 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 구하여라.

02 실력

어떤 학생이 5지선다형의 객관식 문제를 풀고 있다. 이 학생은 정답을 알 때는 그 답을 정확히 쓰고, 정답을 모를 때는 아무 답이나 쓴다. 또 이 학생이 각 문제의 정답을 알고 있을 확률은 $\dfrac{3}{4}$이라고 한다. 이 학생이 정답을 맞혔을 때, 실제로 정답을 알고 맞혔을 확률을 구하여라.

03 기본

흰 공이 3개, 푸른 공이 2개 들어 있는 주머니에서 공을 1개씩 두 번 꺼낸다. 첫 번째는 흰 공이 나오고, 두 번째는 푸른 공이 나올 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

04 기본

두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립할 때, $\mathrm{P}(B)$를 구하여라.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \ \mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4},\ \ \mathrm{P}(A^{c}\cap B^{c})=\frac{1}{3}$$

두 사건 A, B가 서로 독립
$\Leftrightarrow \mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

05 바탕

표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 두 사건 A, B가

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{3,\ 4\}$$

일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립인지, 종속인지 말하여라.

06 기본

어떤 제품이 담겨 있는 상자 중에서 사은품이 들어 있는 비율이 20 %라고 한다. 임의로 4개의 상자를 꺼낼 때, 사은품이 들어 있는 상자가 적어도 3개 나올 확률을 구하여라.

07 기본

어떤 농구 선수의 자유투 성공률이 $\frac{2}{3}$라고 한다. 이 선수가 3번의 자유투를 던질 때, 몇 번 성공할 확률이 가장 큰지 구하여라.

08 실력

6발 쏘아서 평균 3발을 명중시키는 사수가 있다. 이 사수가 적어도 1발을 명중시킬 확률이 0.999보다 크기 위하여 최소한 몇 발을 쏘아야 하는가?

① 6발 ② 7발 ③ 8발
④ 9발 ⑤ 10발

대단원 평가 문제



정답과 풀이 p.307

01

$P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$, $P(A\cup B)=0.4$ 일 때, $P(B|A)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

02

1에서 9까지 적힌 9장의 카드 중에서 2장을 뽑을 때, 두 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{5}{18}$　② $\frac{7}{18}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{11}{18}$　⑤ $\frac{13}{18}$

03

서로 다른 세 주머니에 100원 짜리 동전 10개를 나누어 넣는 경우의 수는?

① 57가지　② 60가지　③ 62가지　④ 66가지　⑤ 70가지

04

50개의 제품 중 3개의 불량품이 들어 있는 상자에서 제품을 1회에 1개씩 두 번 꺼낼 때, 두 번 모두 불량품일 확률은?

(단, 꺼낸 제품은 상자에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{625}$　② $\frac{2}{1225}$　③ $\frac{3}{1225}$　④ $\frac{3}{1250}$　⑤ $\frac{9}{2500}$

05

두 사람이 흰 공 4개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 한 번에 한 개씩 번갈아 가며 뽑아서 흰 공이 먼저 나온 사람이 이기는 것으로 할 때, 먼저 꺼낸 사람이 이길 확률은?

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{5}{9}$　② $\frac{10}{21}$　③ $\frac{20}{21}$　④ $\frac{32}{63}$　⑤ $\frac{40}{63}$

06

한 개의 주사위를 두 번 던져서 처음에 나오는 눈의 수를 a, 나중에 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{17}{36}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

07

두 개의 주사위 A, B를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$에 대하여 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않을 확률은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

08

다항식 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$의 전개식에서 상수항은?

① 84 ② 36 ③ 0
④ -36 ⑤ -84

09

명중률이 75 %인 사수가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 1 또는 2의 눈이 나오면 두 번 쏘고, 그 이외의 눈이 나오면 세 번을 쏘기로 한다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 이에 따라 목표물을 쏠 때, 오직 한 번만 명중할 확률은?

① $\frac{7}{32}$ ② $\frac{9}{32}$ ③ $\frac{11}{32}$
④ $\frac{13}{32}$ ⑤ $\frac{15}{32}$

10

A, B, C 세 사람이 주사위 던지기 놀이를 하는데 3의 배수의 눈이 나오면 이기는 것으로 한다. A부터 시작하여 A, B, C, A, B, C, …의 순으로 승부가 날 때까지 계속한다고 할 때, B가 이길 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{19}$ ③ $\frac{13}{19}$
④ $\frac{16}{19}$ ⑤ 1

11

프로야구의 결승전은 7번 경기를 하여 먼저 4번을 이기는 팀이 우승을 한다. 두 팀 A, B가 프로야구의 결승전에서 만났고, A 팀의 승률이 $\frac{3}{5}$일 때, 5차전에서 승부가 가려질 확률은?

(단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{192}{3125}$ ② $\frac{168}{625}$ ③ $\frac{32}{125}$
④ $\frac{1024}{3125}$ ⑤ $\frac{314}{625}$

12

비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{3}{5}$이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{1}{3}$이라고 한다. 어느 수요일에 비가 왔을 때, 같은 주 토요일에 비가 올 확률은?

① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{27}{125}$ ③ $\frac{47}{125}$
④ $\frac{523}{1125}$ ⑤ $\frac{623}{1125}$

13

$\left(2x^3+\frac{1}{3x^2}\right)^n$의 전개식이 상수항을 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

①5 ②6 ③7
④8 ⑤9

14

방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 x, y, z의 양의 정수인 해의 개수는?

①12개 ②16개 ③20개
④28개 ⑤36개

15

A 상자에는 흰 공 2개와 검은 공 3개, B 상자에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있다. 한 개의 상자를 임의로 선택하여 한 개의 공을 꺼내었더니 그것이 흰 공이었을 때, 택한 상자가 A 상자일 확률은?

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{29}{70}$ ③ $\frac{5}{29}$
④ $\frac{8}{29}$ ⑤ $\frac{14}{29}$

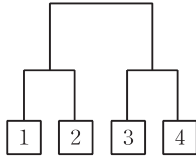
16 UP!!

10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 나온 개수만큼 동전을 던질 때, 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은?

① $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$ ③ $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$
④ $1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\frac{11}{12}\right)^{11}$

17 UP!!

A, B, C, D 4명이 그림과 같은 대진표에 따라 경기를 한다. 이들은 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 한 개씩 적힌 카드가 들어 있는 주머니에서 카드를 임의로 하나씩 꺼내어 나온 번호에 위치한다. A가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이라고 하자. 이때, A와 B가 결승에서 만날 확률은?



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

18 서술형

한 개의 주사위를 10번 던져서 n번째 나오는 눈의 수가 짝수이면 $X_n=2$, 홀수이면 $X_n=-1$의 값을 주도록 한다.

$$X_1+X_2+\cdots+X_{10}$$

일 확률을 구하여라.

19 서술형

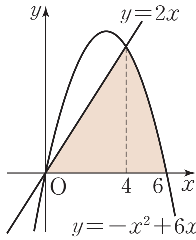
사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3}{4}$, 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}$라고 할 때, 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위를 구하여라.

20 서술형

두 선수 A, B의 명중률이 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$이다. 두 선수 A, B가 같은 표적을 향해 사격을 했을 때, 한 사람만 명중시킬 확률을 구하여라.

2단계 **도형의 넓이를 구한다.**

따라서 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$를 좌표평면 위에 함께 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 구간 $[0, 4]$에서 $2x\ge0$이고 구간 $[4, 6]$에서 $-x^2+6x\ge0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^4 2x\,dx+\int_4^6(-x^2+6x)dx$$

$$=\Big[x^2\Big]_0^4+\Big[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big]_4^6$$

$$=16+\left\{(-72+108)-\left(-\frac{64}{3}+48\right)\right\}=\frac{76}{3}$$

답 $\frac{76}{3}$

20 1단계 **정지할 때까지 걸린 시간을 구한다.**

(1) 열차가 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=18-1.2t=0$　　$\therefore t=15$

즉, 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간은 15초이다.

2단계 **이동한 거리를 구한다.**

이때, 이동한 거리는

$$\int_0^{15}(18-1.2t)dt=\Big[18t-0.6t^2\Big]_0^{15}$$

$$=270-135=135\ (\text{m})$$

3단계 **120 m를 이동하는 데 걸리는 시간을 구한다.**

(2) 120 m 이동하는 데 t초 걸린다고 하면

$$\int_0^t(18-1.2t)dt=\Big[18t-0.6t^2\Big]_0^t$$

$$=18t-0.6t^2=120$$

에서

$t^2-30t+200=0$, $(t-10)(t-20)=0$

$\therefore t=10$ 또는 $t=20$

그런데 (1)에서 $0<t<15$이므로 열차가 브레이크를 건 후 120 m를 이동하는 데 걸리는 시간은 10초이다.

답 (1) 135 m (2) 10초

IV 확률

중단원 평가 문제

▶ 1. 조합 / P_167

01 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 21가지

02 $(x+y+z)^5$을 전개할 때, 생기는 항은

x^5, y^5, z^5, x^4y, $\cdots$, x^2y^2z, $\cdots$

등으로 모두 5차항이다.

따라서 항의 가짓수는 x, y, z의 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)

답 21가지

03 세 문자 x, y, z로 만들 수 있는 4차항의 개수는 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 항의 개수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(개)

답 ⑤

04 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$(개)

답 ③

05 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5+10-1}C_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4$

$=\dfrac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}=1001$(가지)

답 ①

06 먼저 사과, 감, 귤을 한 개씩 바구니에 넣고, 9개의 과일을 넣으면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$(가지)

답 ②

07 무기명 투표는 이름을 밝히지 않는 것으로 중복조합으로 생각할 수 있다.

선거에 출마한 3명 중에서 중복을 허용하여 100번 뽑는 경우이다. 즉, 서로 다른 3개에서 100개를 택하는 중복조합이므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+100-1}C_{100}={}_{102}C_{100}={}_{102}C_{2}=5151$(가지)

답 ⑤

08 (1) $(2a+3b)^3$

$={}_3C_0(2a)^3+{}_3C_1(2a)^2\cdot 3b+{}_3C_2\cdot 2a(3b)^2+{}_3C_3(3b)^3$

$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

(2) $(2x-3)^4$

$={}_4C_0(2x)^4+{}_4C_1(2x)^3(-3)+{}_4C_2(2x)^2(-3)^2+{}_4C_3\cdot 2x(-3)^3+{}_4C_4(-3)^4$

$=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$

답 (1) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$
(2) $16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$

09 $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^9$의 일반항은 ${}_9C_r(-1)^{9-r}x^{3r-9}$

상수항은 $3r-9=0$일 때, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_9C_3(-1)^{9-3}={}_9C_3=84$

답 84

10 (i) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(ii) $(x+2)^5$의 전개식의 일반항이 ${}_5C_rx^r\cdot 2^{5-r}$ 이므로

x의 항은 ${}_5C_1x\cdot 2^4=80x$

상수항은 ${}_5C_02^5=32$

(i), (ii)에 의하여 $(x+1)^2(x+2)^5$의 전개식에서 x의 항은

$2x\times 32+1\times 80x=144x$

따라서 x의 계수는 144이다.

답 ⑤

11 $(x+1)^5=(1+x)^5={}_5C_0+{}_5C_1x+\cdots+{}_5C_5x^5$

$(3x-2)^4={}_4C_0(3x)^4+{}_4C_1(3x)^3(-2)+{}_4C_2(3x)^2(-2)^2+{}_4C_3\cdot 3x(-2)^3+{}_4C_4(-2)^4$

따라서 x^2의 계수는

${}_5C_0\cdot{}_4C_2\cdot 3^2(-2)^2+{}_5C_1\cdot{}_4C_3\cdot 3(-2)^3+{}_5C_2\cdot{}_4C_4(-2)^4=-104$

답 -104

12 $(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

의 양변에 $x=1$과 $x=-1$을 대입하면

$2^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$ …㉠

$0={}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$ …㉡

㉠+㉡을 하면

$2^{10}=2({}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10})$

$\therefore {}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^9=512$

답 ③

13 $\{x^2+(x+1)\}^5$의 일반항은 ${}_5C_r(x^2)^r(x+1)^{5-r}$

$r=0$일 때, ${}_5C_0(x+1)^5$에서 x^3의 항은

${}_5C_0\cdot{}_5C_3x^3=10x^3$

$r=1$일 때, ${}_5C_1x^2(x+1)^4$에서 x^3의 항은

${}_5C_1x^2\cdot{}_4C_1x={}_5C_1\cdot{}_4C_1x^3=20x^3$

따라서 x^3의 계수는 $10+20=30$이다.

답 30

14 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

$\therefore 500<2^n-1<1000$ ……㉠

$2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로

㉠을 만족하는 자연수 n은 9이다.

답 9

15 $(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

의 양변에 $x=9$를 대입하면

$(1+9)^{10}$

$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 9+{}_{10}C_2\cdot 9^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 9^{10}$

$\therefore {}_{10}C_0+9{}_{10}C_1+9^2{}_{10}C_2+\cdots+9^{10}{}_{10}C_{10}=10^{10}$

따라서 0의 개수는 10개이다.

답 ⑤

16 $A=\{0, 1, 2, \cdots, 20\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 21개이다.
그러므로 집합 A의 $\varnothing$이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는
${}_{21}C_2+{}_{21}C_4+{}_{21}C_6+\cdots+{}_{21}C_{20}$(개)
이때,
${}_{21}C_0+{}_{21}C_2+{}_{21}C_4+\cdots+{}_{21}C_{20}=2^{21-1}=2^{20}$
$\therefore {}_{21}C_2+{}_{21}C_4+{}_{21}C_6+\cdots+{}_{21}C_{20}=2^{20}-1$

답 $(2^{20}-1)$개

▶ 2. 확률의 뜻과 활용 / P_186

01 8개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$8!$가지
홀수 번째 자리 4개 중 3개를 택하여 모음 i, a, e를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3$가지이고, 나머지 5개의 자리에 자음 t, r, n, g, l을 배열하는 경우의 수는 $5!$가지이므로 모음이 홀수 번째 자리에 오게 되는 경우의 수는
${}_4P_3\times5!$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{{}_4P_3\times5!}{8!}=\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}=\dfrac{1}{14}$

답 ③

02 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$(가지)
(1) 남학생 2명이 양쪽 끝에 서는 경우의 수는 $2!=2$(가지)이고, 이들 각각에 대하여 여학생 2명이 서는 경우의 수도 $2!=2$(가지)이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2\times2}{24}=\dfrac{1}{6}$
(2) 여학생과 남학생이 번갈아 가며 서는 경우는 여남여남의 순서로 서는 경우 또는 남여남여의 순서로 서는 경우이다.
여남여남의 순서로 서는 경우의 수는
$2!\times2!=4$(가지)
남여남여의 순서로 서는 경우의 수는
$2!\times2!=4$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4+4}{24}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$
(3) 여학생 2명을 하나로 묶어서 생각하면 3명을 일렬로 세우는 경우이므로 그 경우의 수는 $3!=6$(가지)
또 이 경우 각각에 대하여 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$(가지)
그러므로 여자끼리 이웃하여 서는 경우의 수는 $6\times2=12$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

03 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)
1에서 5까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고 6이 적힌 공을 꺼내면 나온 번호의 최댓값이 6이 된다.
그러므로 나온 번호의 최댓값이 6인 경우의 수는
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

답 ②

04 동전 12개에서 6개의 동전을 꺼내는 경우의 수는
${}_{12}C_6=924$(가지)
이 중에서 금액의 합이 500원 이상인 경우는 다음과 같다.
(i) 100원짜리 동전 4개, 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 경우 ${}_6C_4\cdot{}_4C_2=90$(가지)
(ii) 100원짜리 동전 5개를 꺼내고, 10원짜리 동전과 50원짜리 동전 중에서 1개를 꺼내는 경우 ${}_6C_5\cdot{}_6C_1=36$(가지)
(iii) 100원짜리 동전 6개를 꺼내는 경우
${}_6C_6=1$(가지)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{90+36+1}{924}=\dfrac{127}{924}$

답 $\dfrac{127}{924}$

05 구하는 안타의 개수를 x라고 하면 타율이

0.295이므로 $\frac{x}{200}=0.295$ $\therefore x=59$

따라서 이 선수가 이번 시즌에 200번의 타석에서 칠 수 있는 안타의 개수는 59개로 추측할 수 있다.

답 59개

06 주머니 속에서 한 개의 공을 꺼낼 때 그 공이

흰 공일 확률은 $\frac{3}{3+4+n}=\frac{3}{7+n}$ ……㉠

1000번의 시행에서 흰 공이 250번 나왔으므로

통계적 확률은 $\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$ ……㉡

㉠=㉡이므로 $\frac{3}{7+n}=\frac{1}{4}$

$7+n=12$ $\therefore n=5$

답 ⑤

07 흰 공 3개에서 2개의 공을 꺼내는 것이므로 꺼낸 두 공의 색은 흰 색이다.

(1) 꺼낸 두 공의 색이 같은 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

(2) 꺼낸 두 공의 색이 다른 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) 1 (2) 0

08 사건 A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, 사건 서로 B와 배반인 사건은 B^C의 부분집합이므로, 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건은 $A^C \cap B^C$의 부분집합이다.

$A^C=\{1, 5, 6, 7\}$, $B^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$A^C \cap B^C=\{1, 5\}$

따라서 두 사건 A, B 모두와 서로 배반인 사건의 개수는

$2^2=4$(개)

답 4개

09 (1) 1부터 300까지의 자연수 중에서 3의 배수가 나오는 경우는

3, 6, 9, …, 297, 300

즉, 3×1, 3×2, …, 3×99, 3×100으로 100가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$

(2) 1부터 300까지의 자연수 중에서 4의 배수가 나오는 경우는

4, 8, 12, …, 296, 300

즉, 4×1, 4×2, …, 4×74, 4×75로 75가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$

(3) 3의 배수가 나오는 사건을 A, 4의 배수가 나오는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 3과 4의 최소공배수인 12의 배수가 나오는 사건이다.

$A\cap B=\{12, 24, \cdots, 288, 300\}$에서

$n(A\cap B)=25$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{25}{300}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$

10 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

(1) (i) 두 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2),

(5, 1)의 5가지이므로 그 확률은 $\frac{5}{36}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 8이 되는 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3),

(6, 2)의 5가지이므로 그 확률은 $\frac{5}{36}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

(2) (ⅰ) 두 눈의 수의 합이 3 이하인 경우는
(1, 1), (1, 2), (2, 1)의 3가지이므로
그 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 11 이상인 경우는
(5, 6), (6, 5), (6, 6)의 3가지이므로
그 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

답 (1) $\frac{5}{18}$ (2) $\frac{1}{6}$

11 (1) 10개의 제비 중에 당첨 제비가 3개 들어 있으므로 구하는 확률은 $\frac{3}{10}$
(2) 갑이 당첨 제비를 뽑으면 을은 남아 있는 당첨 제비 2개 중 하나를 뽑아야 한다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$
(3) 갑이 당첨 제비가 아닌 7개 중 하나를 뽑고, 을이 당첨 제비 3개 중 하나를 뽑아야 한다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$
(4) 을이 당첨되는 경우는 (2) 또는 (3)의 경우이고 (2), (3)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

답 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{1}{15}$ (3) $\frac{7}{30}$ (4) $\frac{3}{10}$

12 세 사람이 가위바위보를 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 $3\times3\times3=27$(가지)
세 사람이 비기는 경우는 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우 또는 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우이다.
(ⅰ) 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우는
(가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위), (보, 보, 보)의 3가지이므로 그 확률은
$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$
(ⅱ) 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우는
(가위, 바위, 보), (가위, 보, 바위),
(바위, 가위, 보), (바위, 보, 가위),
(보, 가위, 바위), (보, 바위, 가위)
의 6가지이므로 그 확률은 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$
(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

답 ④

13 $P(B^C)=\frac{1}{3}$에서
$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

답 ③

14 (1) 두 공의 색이 같은 경우는 두 공이 모두 검은 공인 경우 또는 두 공이 모두 흰 공인 경우이다.
(ⅰ) 두 공이 모두 검은 공일 확률은
$\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$
(ⅱ) 두 공이 모두 흰 공일 확률은
$\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$
(ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\frac{25}{64}+\frac{9}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$
(2) 두 공의 색이 다른 사건은 (1)의 여사건이므로 구하는 확률은 $1-\frac{17}{32}=\frac{15}{32}$

답 (1) $\frac{17}{32}$ (2) $\frac{15}{32}$

15 적어도 한쪽 끝에 여학생이 서는 사건을 A라고 하자.
이때, A^C은 여학생이 양쪽 끝에 서지 않는 사건, 즉 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 사건이므로 그 확률은 $P(A^C)=\frac{{}_3P_2\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

답 ③

16 10개의 구슬 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$가지
적어도 1개가 노란 구슬인 사건을 A라고 하면 A^C은 노란 구슬이 1개도 꺼내지지 않은 사건, 즉 2개 모두 흰 구슬인 사건이다. 이때, 노란 구슬의 개수를 n개라고 하면 A^C의 경우의 수는 ${}_{10-n}C_2$가지이므로

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{{}_{10-n}C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15}$$

$${}_{10-n}C_2=\frac{7}{15}\times{}_{10}C_2$$

$$\frac{(10-n)(9-n)}{2}=21$$

$$(10-n)(9-n)=42=7\times6$$

$$10-n=7 \qquad \therefore n=3$$

따라서 노란 구슬의 개수는 3개이다.

답 ①

|다른 풀이|
흰 구슬의 개수를 n개라고 하면

$$1-\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15},\ \frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{n(n-1)}{10\cdot9}=\frac{7}{15}$$

$$n(n-1)=7\times6 \qquad \therefore n=7$$

따라서 흰 구슬이 7개이므로 노란 구슬의 개수는 $10-7=3$(개)

▶ 3. 조건부확률 / P_200

01 $P(A)=0.6$, $P(A\cap B)=0.35$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.35}{0.6}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

02 정답을 맞히는 사건을 A, 정답을 알고 있는 사건을 B라고 하자.
정답을 알 때는 그 답을 정확히 쓰므로 정답을 맞힐 확률은 1이다. 그러므로 정답을 알고 맞힐 확률은 $P(A\cap B)=\frac{3}{4}\times1$
정답을 모를 때는 아무 답이나 쓰므로 정답을 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이다. 그러므로 정답을 모르고 맞힐 확률은 $P(A\cap B^C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

$$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$
$$=\frac{3}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

따라서 정답을 맞혔을 때, 실제로 정답을 알고 맞혔을 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}=\frac{15}{16}$$

답 $\frac{15}{16}$

03 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A라고 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$
두 번째에 푸른 공이 나오는 사건을 B라고 하면 첫 번째에 흰 공이 나왔을 때, 두 번째에 푸른 공이 나올 확률은(흰 공을 하나 꺼냈으므로 흰 공 2개, 푸른 공 2개가 남아있다.)

$$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

04 $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=\frac{1}{3}$이므로

$$P(A\cup B)=1-P((A\cup B)^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{2}{3}=P(B)-\frac{1}{3}$$

한편
$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$이므로

$$P(B)-\frac{1}{3}=P(B)\cdot\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}P(B)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B)=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

05 $A\cap B=\{3\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{2}{5}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

답 종속

06 상자 중 사은품이 들어 있을 확률은 $\frac{1}{5}$이고, 들어 있지 않을 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

사은품이 3개 나올 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1$

사은품이 4개 나올 확률은 ${}_4C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0$

따라서 임의로 상자 4개를 꺼냈을 때, 사은품이 들어 있는 상자가 적어도 3개 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0$

$=\frac{16}{625}+\frac{1}{625}=\frac{17}{625}$

답 $\frac{17}{625}$

07 자유투의 성공률이 $\frac{2}{3}$이므로 성공하지 못할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

0번 성공할 확률은 ${}_3C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

1번 성공할 확률은 ${}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

2번 성공할 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$

3번 성공할 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$

따라서 2번 성공할 확률이 가장 크다.

답 2번

08 6발 중 평균 3발을 명중시키므로, 이 사수가 한 발을 쏘았을 때 명중시킬 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 명중시키지 못할 확률도 $\frac{1}{2}$이다.

n발 중 1발도 명중시키지 못할 확률은

${}_nC_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

그러므로 적어도 1발을 명중시킬 확률은

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이 확률이 0.999보다 커야하므로

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n>0.999$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.001$

$2^n\geq 1000$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $n\geq 10$

따라서 최소한 10발을 쏘아야 한다.

답 ⑤

대단원 평가 문제

p.202~205

01 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.3+0.2-0.4=0.1$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$

답 ④

02 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 A^C은 두 수의 곱이 짝수가 아닌 사건, 즉 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.

두 수의 곱이 홀수인 경우는 (홀수)×(홀수)일 때이므로 그 경우의 수는 ${}_5C_2$(가지)

$\therefore P(A^C)=\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$

따라서 2장을 뽑을 때, 두 수의 곱이 짝수일 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

답 ⑤

03 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수이므로 구하는 경우의 수는

${}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$(가지)

답 ④

04 첫 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 A라고 하면

$P(A)=\frac{3}{50}$

두 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라고 하면, 첫 번째에 불량품을 꺼냈을 때, 두 번째도 불량품을 꺼낼 확률은 $P(B|A)=\frac{2}{49}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{3}{50}\times\frac{2}{49}=\frac{3}{1225}$

답 ③

05 흰 공이 나오는 사건을 A, 검은 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, 먼저 꺼낸 사람이 흰 공을 뽑는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) A: $\frac{4}{9}$

(ii) BBA: $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}$

(iii) $BBBBA$: $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{63}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{9}+\frac{10}{63}+\frac{2}{63}=\frac{40}{63}$

답 ⑤

06 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $a^2-4b>0$이므로

(i) $a=1, 2$일 때, $a^2>4b$인 b는 없다.

(ii) $a=3$일 때, $b=1, 2$의 2가지

(iii) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3$의 3가지

(iv) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6가지

(v) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6가지

(i)~(v)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{2+3+6+6}{36}=\frac{17}{36}$

답 ④

07 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

이때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ a & b\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 조건은

$2b-3a=0 \quad \therefore 3a=2b$

이 식을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$, $(4, 6)$의 2가지이다.

따라서 역행렬 A^{-1}가 존재하지 않을 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

답 ①

08 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$의 전개식의 일반항은

${}_9\mathrm{C}_r(x^2)^{9-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r(-1)^r x^{18-3r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 9$)

상수항은 $18-3r=0$에서 $r=6$일 때이므로

${}_9\mathrm{C}_6(-1)^6={}_9\mathrm{C}_3=84$

답 ①

09 한 개의 주사위를 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

또 명중률이 75 %이므로 한 번 쐈을 때, 명중할 확률은 $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$이고, 명중하지 않을 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

그러므로 두 번을 쐈을 때, 한 번만 명중할 확률은 ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1$

세 번을 쐈을 때, 한 번만 명중할 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1+\frac{2}{3}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{32}=\frac{7}{32}$

답 ①

10 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

B가 이기기 위해서는 3의 배수의 눈이 2번째 또는 5번째 또는 8번째, …일 때만 나와야 한다.

2번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

5번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}$

8번째에 B가 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^7\frac{1}{3}$

⋮

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^7\frac{1}{3}+\cdots$

$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{6}{19}$

답 ②

11 (i) A 팀이 우승하는 경우

4차전까지 A 팀이 3번, B 팀이 1번 이기고 5차전에서 A 팀이 이기면 되므로 그 확률은

$_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}$

(ii) B 팀이 우승하는 경우

4차전까지 A 팀이 1번, B 팀이 3번 이기고 5차전에서 B 팀이 이기면 되므로 그 확률은

$_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}$

따라서 5차전에서 승부가 가려질 확률은

$_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}+{}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}$

$=\frac{648}{3125}+\frac{192}{3125}=\frac{840}{3125}=\frac{168}{625}$

답 ②

12 비가 오는 경우를 ○, 오지 않는 경우를 ×라고 하면 토요일에 비가 오는 경우와 그 확률은 다음 표와 같다.

수	목	금	토	확률
○	○	○	○	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$
○	○	×	○	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{25}$
○	×	○	○	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{25}$
○	×	×	○	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{45}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{27}{125}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{45}=\frac{523}{1125}$

답 ④

13 $\left(2x^3+\frac{1}{3x^2}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

$_nC_r(2x^3)^r\left(\frac{1}{3x^2}\right)^{n-r}={}_nC_r2^r\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}x^{5r-2n}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

$\left(2x^3+\frac{1}{3x^2}\right)^n$이 상수항을 가지려면

$5r-2n=0$인 자연수 n과 음이 아닌 정수 r가 존재해야 한다.

$\therefore n=\frac{5}{2}r$

따라서 $r=2$일 때, 최솟값 $n=5$를 가진다.

답 ①

14 $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$이라고 하면 주어진 문제는 방정식 $a+b+c=7$을 만족하는 a, b, c의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 것과 같다.

이것은 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(개)

답 ⑤

15 상자 A, B가 선택될 사건을 각각 A, B라 하고, 흰 공이 나올 사건을 W라고 하자.

(i) A 상자가 선택되고, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

(ii) B 상자가 선택되고, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(B\cap W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_3C_1}{{}_7C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$$

(i), (ii)에 의하여 흰 공이 나올 확률은

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{3}{14}=\frac{29}{70}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|W)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{29}{70}}=\frac{14}{29}$$

답 ⑤

16 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 k개 나올 확률은 ${}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$

k개의 동전을 던질 때 모두 뒷면이 나올 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$이므로 k개의 동전을 던질 때 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$

그러므로 10개의 주사위를 동시에 던져서 1의 눈이 k개 나오고, k개의 동전을 던져서 적어도 한 개가 앞면이 나올 확률은

$${}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)

따라서 구하는 확률은

$$\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}-\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{1}{12}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$
$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^{10}-\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\right)^{10}$$
$$=1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10}$$

답 ④

17 대진표를 짜는 전체 경우의 수는 4!가지

(i) A와 B가 첫 번째 경기에서 만나지 않는 경우

A가 카드를 선택할 수 있는 경우의 수는 4가지이고 그 각각에 대하여 B가 2가지 경우가 있다. (예를 들어 A가 1을 선택하면 B는 3 또는 4를 선택할 수 밖에 없다.)

그리고 나머지 2명이 카드를 선택하는 경우의 수는 2!가지이다.

그러므로 A와 B가 첫 번째 경기에서 만나지 않을 확률은

$$\frac{4\times2\times2!}{4!}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

(ii) A와 B 모두 결승에 진출하는 경우

A가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{2}{3}$이고, B가 C, D와 경기할 때 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 A, B 모두 결승에 진출할 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 A와 B가 결승에서 만날 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

답 ①

18 1단계 **짝수와 홀수가 나오는 횟수를 구한다.**

짝수가 나오는 횟수를 a, 홀수가 나오는 횟수를 b라고 하면

$S_{10}=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{10}=2$

에서 $X_i\,(1\le i\le10)$의 값은 2 또는 -1이므로

$2a-b=2,\ a+b=10$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=6$

그러므로 10번을 던져서 짝수의 눈이 4번, 홀수의 눈이 6번 나와야 한다.

2단계 **$S_{10}=2$일 확률을 구한다.**

이 시행은 독립시행이고 각 시행에서 짝수, 홀

수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

$${}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{210}{2^{10}}=\frac{105}{512}$$

답 $\frac{105}{512}$

19 1단계 **P($A\cap B$)의 값을 구한다.**

두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{17}{12}-\mathrm{P}(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$

2단계 **P($A\cap B$)의 범위를 구한다.**

$\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(B)$이므로

$$\frac{3}{4}\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

3단계 **P($A\cap B$)의 범위를 구한다.**

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{5}{12}\le \mathrm{P}(A\cap B)\le \frac{2}{3}$$

답 $\frac{5}{12}\le \mathrm{P}(A\cap B)\le \frac{2}{3}$

20 1단계 **둘 중 한 사람만 명중시키는 사건을 나타낸다.**

두 선수 A, B가 명중시키는 사건을 각각 A, B라고 하면 A는 명중시키고 B는 명중시키지 못하는 사건은

$A\cap B^C$

A는 명중시키지 못하고 B는 명중시키는 사건은

$A^C\cap B$

2단계 **둘 중 한 사람만 명중시킬 확률을 구한다.**

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B))$$
$$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

V 통계

중단원 평가 문제

▶ 1. 확률분포 / P_244

01 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

답 풀이 참조

02 $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^1 f(x)dx=1$, 즉 $\int_0^1 ax^3dx=1$이므로

$$\left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^1=\frac{a}{4}=1 \qquad \therefore a=4$$

답 ④

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$$

확률변수 X의 평균이 -1이므로

$$-a\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-1$$
$$-\frac{1}{4}a=-1 \qquad \therefore a=4$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{V}(X)=(-4)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-(-1)^2$$
$$=11$$

답 ⑤

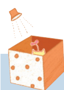
V 통계

1 확률분포　　2 통계적 추정



우리는 미국, 일본, 중국의 기후는 물론이고 우리나라와 지구 반대편에 있는 브라질의 기후도 우리 경제에 커다란 영향을 끼치는 시대에 살고 있다. 다양한 사회 현상과 복잡한 자연 현상을 규명하여 행복한 삶을 유지하기 위해서는 우연히 일어나는 작은 사건에도 주목하여야 하고, 우연한 현상 속에서 규칙성을 찾을 수 있는 통계적 추론 능력을 갖추어야 한다.

단원의 흐름



이미 배운 내용

▶중학교 1학년
- 히스토그램과 도수분포다각형

▶중학교 2학년
- 확률

▶중학교 3학년
- 대푯값, 평균, 중앙값, 최빈값
- 산포도, 분산, 표준편차

▶미적분과 통계 기본
- 확률



이번에 배울 내용

- 확률변수와 확률분포
- 확률변수의 평균과 표준편차
- 이항분포
- 정규분포
- 모집단과 표본
- 모평균의 추정

이 단원의 학습 목표

1. 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
2. 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.
3. 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
4. 이항분포의 뜻을 알고, 그 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
5. 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해한다.
6. 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.
7. 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

단원을 시작하기 전에 …

확률 — **1** 한 개의 동전을 세 번 던질 때, 앞면이 두 번 나올 확률을 구하여라.

확률의 기본 성질 — **2** 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.
(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\square \le \mathrm{P}(A) \le \square$이다.
(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\square$이다.
(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\square$이다.

합의 기호 Σ — **3** 다음을 Σ를 써서 나타내어라.
(1) $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$
(2) $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$

평균, 표준편차 — **4** 어느 학생이 5번 치른 수학 시험 점수가 다음과 같다. 수학 시험 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

85, 81, 88, 89, 82

이항정리 — **5** 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 항의 계수를 구하여라.
(1) $(a+b)^4$ $[a^3b]$ (2) $(2a+3b)^5$ $[a^3b^2]$

단원을 시작하기 전에 ·········· 풀이

1 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 뒷면이 나올 확률도 $\frac{1}{2}$이다.
따라서 세 번의 시행에서 앞면이 두 번 나올 확률은
${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\mathbf{\frac{3}{8}}$

2 (1) $\boxed{\mathbf{0}} \le \mathrm{P}(A) \le \boxed{\mathbf{1}}$
(2) $\mathrm{P}(S)=\boxed{\mathbf{1}}$
(3) $\mathrm{P}(\varnothing)=\boxed{\mathbf{0}}$

3 (1) $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}$
(2) $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$
$=\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i}$

4 평균 : $(85+81+88+89+82)\div5$
$=425\div5=\mathbf{85}$
분산 : $\{(85-85)^2+(81-85)^2+(88-85)^2+(89-85)^2+(82-85)^2\}\div5$
$=50\div5=10$
표준편차 : $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

5 (1) $(a+b)^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4\mathrm{C}_ra^rb^{4-r}$
$r=3$일 때, ${}_4\mathrm{C}_3a^3b=4a^3b$이므로 a^3b의 계수는 **4**이다.
(2) $(2a+3b)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2a)^r(3b)^{5-r}$
$r=3$일 때, ${}_5\mathrm{C}_3(2a)^3(3b)^2=720a^3b^2$이므로 a^3b^2의 계수는 **720**이다.

1 확률분포

이 단원을 배우면

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 알 수 있다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해할 수 있다.
- 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.



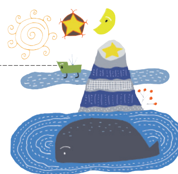
소단원의 학습 목표

1. 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
2. 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
3. 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

확률변수, 이산확률변수, $\mathrm{P}(X=x)$, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수

1 확률변수와 확률분포



학습 목표
- 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
- 이산확률변수의 뜻을 알고, 확률질량함수의 성질을 이해한다.
- 연속확률변수의 뜻을 알고, 확률밀도함수의 성질을 이해한다.

다 가 서 기 / **로또 1등 당첨 확률**



로또(lotto)는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 전 세계에 퍼졌다. 우리나라에는 2002년 12월에 처음으로 로또가 발매되었으며, 그 형식은 45개의 수 중에서 6개를 맞추면 1등이 되는 6/45이다.

로또에서 번호 4개, 5개가 일치할 확률은 각각 $\frac{11115}{8145060}$, $\frac{234}{8145060}$ 이다.

다가서기 / 해설

우리나라에서 판매하는 로또(Lotto)는 2002년 12월부터 시작하였다. 그 형식은 6/45이고, 이것은 45개의 수 중 6개를 구매자가 직접 선택하고 추첨을 통해 당첨 번호와 선택한 번호가 일치하는 개수에 따라 순위를 결정한다는 뜻이다.

로또는 1971년 6월 미국의 뉴저지 주에서 시작되어 1980년대 이후 유럽과 아시아에서도 인기를 누리고 있다.

로또의 형식에는 49개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/49, 54개의 수 중 6개를 맞히면 1등이 되는 6/54, 40개의 수 중 4개를 맞히면 1등이 되는 4/40, 69개의 수 중 7개를 맞히면 1등이 되는 7/69 등이 있다.

6/45에서 번호를 선택하는 전체 경우의 수는 다음과 같다.

$$_{45}C_6=\frac{45\times44\times43\times42\times41\times40}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=8145060(\text{가지})$$

이때, 1등, 2등, 3등, 4등이 될 확률을 구하여 보자.

(i) 번호 6개가 일치하는 경우의 수는

$_6C_6=1$(가지)

따라서 1등이 될 확률은 $\frac{1}{8145060}$

(ii) 번호 5개가 일치하고 보너스 번호 1개가 일치하는 경우의 수는

$_6C_5\times{}_1C_1=6$(가지)

따라서 2등이 될 확률은 $\frac{6}{8145060}=\frac{1}{1357510}$

(iii) 번호 5개가 일치하고 나머지 번호는 보너스 번호와 다른 경우의 수는

$_6C_5\times{}_{38}C_1=228$(가지)

따라서 3등이 될 확률은 $\frac{228}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{35724}$

(iv) 번호 4개가 일치하는 경우의 수는

$_6C_4\times{}_{39}C_2=11115$(가지)

따라서 4등이 될 확률은 $\frac{11115}{8145060}\fallingdotseq\frac{1}{733}$

159

01 확률변수의 뜻

탐구하기 / 동전을 세 번 던질 때, 앞, 뒷면 조사하기

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내자. 표본공간을 S라고 할 때, 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.



S={TTT, TTH, THT, HTT, ☐, ☐, ☐, ☐}

알아보기 / 확률변수의 뜻을 알아보자.

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 X라고 하면 표본공간 S의 각 원소

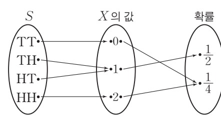
TT, TH, HT, HH

에 대응하는 X의 값은 각각 다음과 같다.

0, 1, 1, 2

$X=0 \Longleftrightarrow$ {TT}
$X=1 \Longleftrightarrow$ {HT, TH}
$X=2 \Longleftrightarrow$ {HH}

즉, X는 0, 1, 2 중에서 한 값을 가지는 변수이고, X의 각 값에 대응하는 확률은 오른쪽 그림과 같다.



이와 같이 어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 **확률변수**라고 한다.

확률변수를 생각함으로써 표본공간을 수량화할 수 있다.

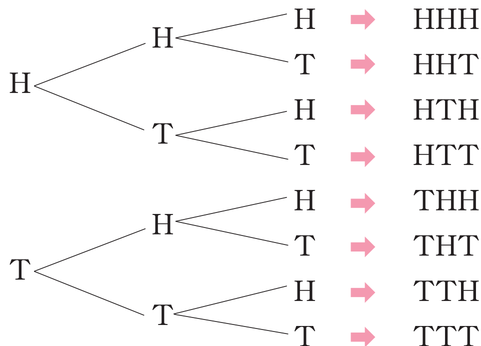
| 참고 | 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 변수의 역할을 하므로 확률변수라고 부른다.

스스로 하기 / 익힘책 131쪽 | 익힘책 132쪽 | 익힘책 133쪽

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 가지는 값을 구하여라.

탐구하기 / 풀이

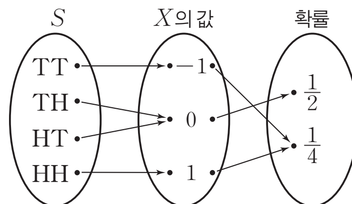
한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore S$={TTT, TTH, THT, HTT, **THH**, **HTH**, **HHT**, **HHH**}

알아보기 / 해설

- 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 위에 나오는 면을 관찰하면 표본공간은 { ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ }
또 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간은 {TT, TH, HT, HH}
이처럼 표본공간이 그림이나 문자로 주어지면 확률의 계산을 할 때, 불편하므로 표본공간을 수량화할 필요가 있다.
- 어떤 표본공간 위에서 정의되는 확률변수는 본문의 내용 외에도 여러 가지가 있다. 예를 들어 (앞면이 나오는 횟수)−1을 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값과 X의 각 값에 대응하는 확률은 다음 그림과 같다.



스스로 하기 / 풀이

1 한 개의 동전을 네 번 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간 S는

S={TTTT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT, TTHH, THHT, HHTT, THTH, HTHT, HTTH, THHH, HTHH, HHTH, HHHT, HHHH}

이때, 확률변수 X는 앞면이 나오는 횟수이므로 X가 가지는 값은 **0, 1, 2, 3, 4**이다.

알아보기 / 해설

- 중학교 때 배운 도수분포와 이 단원에서 배우는 확률분포를 연결지어 생각하면 편리하다.

도수분포	⟷	확률분포
계급값	⟷	확률변수
상대도수	⟷	확률
상대도수의 분포표	⟷	확률분포표

- 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 일 때, 모든 i에 대하여 p_i는 0 이상이고 1 이하이다. 또

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

즉, 확률분포에서 각 확률의 합은 항상 1이다.

- $\mathrm{P}(X=x_i \text{ 또는 } X=x_j)$
$=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)$
$=p_i+p_j$ (단, $i\neq j$)

160

02 이산확률변수와 확률질량함수

알 아 보 기 / 이산확률변수와 확률질량함수를 알아보자.

확률변수는 보통 대문자 $X,\ Y,\ Z,\ \cdots$로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 소문자 $x,\ y,\ z,\ \cdots$ 또는 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$으로 나타낸다.

확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 **이산확률변수**라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로

$$\mathrm{P}(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

이때, 확률 $\mathrm{P}(X=x)$는 x의 값에 따라 달라지는 함수가 되며, 이것을 **확률질량함수**라고 한다.

또 이산확률변수 X가 가지는 값과 그 값을 가질 확률과의 대응 관계를 X의 **확률분포**라고 한다.

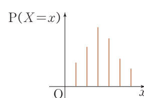
이산확률변수 X는 무한개의 값을 가질 때도 있지만 여기에서는 유한개의 값을 가지는 경우만 다루기로 한다.

확률분포를 식으로 나타내면

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

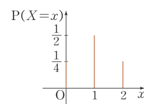
이고, 표로 나타내면 다음과 같다. 또한 확률분포를 그래프로도 나타낼 수 있으며, 이때 보통 선 그래프를 사용한다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1



| 보기 | 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



일반적으로 확률질량함수에 대하여 다음이 성립한다.

확률질량함수의 성질

(1) $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i\leq X\leq x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i\leq j$이다.)

보충 학습

교과서에서는 X가 가지는 값이 유한집합인 것만을 이산확률변수로 취급하였으나, X가 가지는 값이 가산집합(자연수 전체의 집합과 일대일 대응이 되는 집합)인 경우에도 이산확률변수이다.
예를 들어 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 처음 나올 때까지 던진 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$와 같이 자연수 전체의 집합과 같아진다.

함께하기 / 해설

1 (1) 확률변수의 확률분포를 식으로 나타낼 수도 있다.
이 문제에서 주어진 확률변수 X를 식으로 나타내면

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_{3-x}\times{}_3\mathrm{C}_x}{{}_8\mathrm{C}_3}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

161

함 께 하 기 /

익힘책 131쪽 | 익힘책 132쪽 | 익힘책 133쪽

1 남학생 5명과 여학생 3명으로 구성되어 있는 어떤 수학 경시 팀에서 임의로 3명의 대표를 선발할 때, 선발되는 여학생의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 여학생이 2명 이상 선발될 확률을 구하여라.

| 풀이 |

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

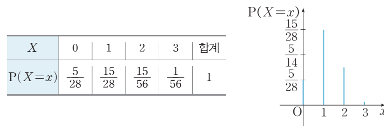
$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{5}{28}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{28}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{15}{56}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{56}$$

따라서 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) 여학생이 2명 이상 선발되는 것은 $X\geq 2$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\mathbf{\frac{2}{7}}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 131쪽 | 익힘책 132쪽 | 익힘책 133쪽

1 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내어라.

(2) 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하가 될 확률을 구하여라.

(3) 눈의 수의 합이 3 이상이 될 확률을 구하여라.

스스로 하기 /

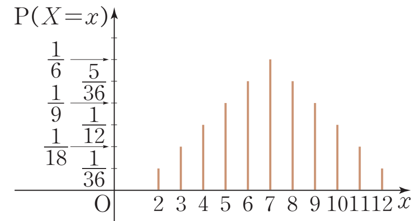
풀이

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합을 표로 만들면 다음과 같다.

두 번째 \ 첫 번째	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(1) 확률변수 X가 가지는 값은 2, 3, 4, ⋯, 11, 12이므로 그 각각의 확률을 구하여 X의 확률분포를 표와 그래프로 각각 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
X	8	9	10	11	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1



(2) 나오는 눈의 수의 합이 5 이상 7 이하인 것은 $5\leq X\leq 7$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(5\leq X\leq 7)$$
$$=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{15}{36}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

(3) 나오는 눈의 수의 합이 3 이상인 것은 $X\geq 3$인 경우이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=1-\mathrm{P}(X=2)$$
$$=1-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{35}{36}}$$

| 다른 풀이 |

$$\mathrm{P}(X\geq 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=11)+\mathrm{P}(X=12)$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$
$$=\frac{35}{36}$$

162

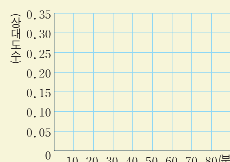
03 연속확률변수와 확률밀도함수

탐 구 하 기 / 히스토그램을 곡선으로 나타내기

아래 표는 A 고등학교 학생 100명의 통학 시간을 조사하여 만든 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 상대도수를 구하여 표를 완성하고, 상대도수의 합은 1임을 확인하여라.
2. 상대도수의 그래프를 히스토그램으로 그리고, 각 막대의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하여라.

계급(분)	도수(명)	상대도수
10이상~20미만	5	0.05
20 ~30	15	
30 ~40	20	
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	
60 ~70	10	
70 ~80	5	0.05
합계	100	1



알 아 보 기 / 연속확률변수와 확률밀도함수를 알아보자.

농작물의 무게, 사람의 키, 통학 시간 등의 측정값을 확률변수 X라고 하면 X는 이산확률변수와는 달리, 어떤 연속하는 범위 안에서 값을 가지게 된다.

이와 같이 어떤 구간의 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 한다.

연속확률변수가 가지는 값은 어떤 구간의 모든 실수이므로 '$X=a$'의 확률을 계산하는 것은 의미가 없고, 대신 주어진 구간의 확률을 생각한다.

이를테면

'통학 시간이 30분 이상 50분 미만이 될 확률'

'키가 170 cm에서 180 cm 사이에 있을 확률'

등을 생각하는 것이 의미가 있다.

X가 연속확률변수일 때, $P(X=a)=0$으로 한다. 따라서 다음이 성립한다.

$P(a\le X\le b)$
$=P(a\le X<b)$
$=P(a<X\le b)$
$=P(a<X<b)$

탐구하기 / 풀이

1. 도수분포표에서 상대도수는 다음과 같이 계산한다.

$$(\text{상대도수})=\frac{(\text{도수})}{(\text{도수의 총합})}$$

따라서 주어진 도수분포표의 빈칸을 채우면 다음 표와 같다.

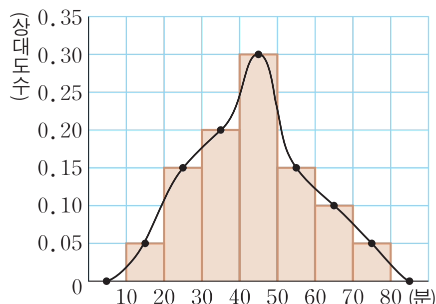
계급(분)	도수(명)	상대도수
10이상~20미만	5	0.05
20 ~30	15	**0.15**
30 ~40	20	**0.20**
40 ~50	30	0.30
50 ~60	15	**0.15**
60 ~70	10	**0.10**
70 ~80	5	0.05
합계	100	1

또 상대도수의 합은

$0.05+0.15+0.20+0.30+0.15$
$+0.10+0.05$
$=1$

임을 확인할 수 있다.

2. 탐구하기 1에 있는 상대도수를 히스토그램으로 그리고, 각 막대의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같다.



알아보기 / 해설

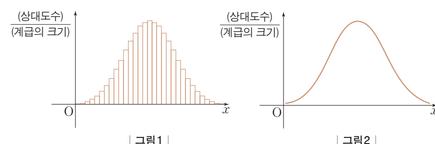
- 동전의 개수 또는 형제의 수를 조사할 때의 측정값과 키 또는 몸무게를 조사할 때의 측정값은 본질적으로 다르다.
  이를테면 동전의 개수를 X개라고 할 때, '$X=51$'의 의미는 동전이 꼭 51개 있다는 뜻이다. 그러나 몸무게를 X kg이라고 할 때, '$X=51$'의 의미는 50.5 kg 이상 51.5 kg 미만이라는 뜻이다. 즉, $50.5\le X<51.5$이다.
- 연속확률변수가 가지는 값은 무한개이므로 통계적 확률 또는 수학적 확률의 정의에서 분모의 값은 무한대가 된다.
  따라서 이러한 경우 '$X=a$'의 확률은 0으로 하는 것이 타당하다.

163

$\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 생각하는 것은 히스토그램의 넓이 또는 도수분포다각형 내부의 넓이를 1로 만들기 위해서이다.

이와 같은 측정에서 조사 대상의 수를 늘리고, 상대도수의 분포표에서 계급의 크기를 줄여서 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$의 히스토그램을 그리면 | **그림1** | 과 같이 될 것이다.

또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 더욱 줄이면 히스토그램의 윗변의 중점을 연결하여 그린 도수분포다각형은 | **그림2** | 와 같이 매끄러운 곡선에 가까워질 것이다.



| **그림1** |　　　　| **그림2** |

이때, 이 곡선은 항상 x축 보다 위쪽 부분에 있고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이 된다.

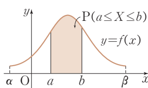
이러한 곡선은 어떤 함수의 그래프가 되는데 이 함수를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

일반적으로 구간 $[\alpha,\ \beta]$의 모든 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X가 구간 $[a,\ b]$ $(\alpha \le a \le b \le \beta)$에 속할 확률은

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

로 주어진다.

여기서 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이이다.



| **참고** | $f(a)$는 $x=a$에서의 확률이 아니고 단지 $x=a$에서의 함숫값이다.

일반적으로 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

확률밀도함수의 성질은 확률질량함수의 성질과 유사하다.

확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$이면

[1] $f(x) \ge 0$

[2] $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$

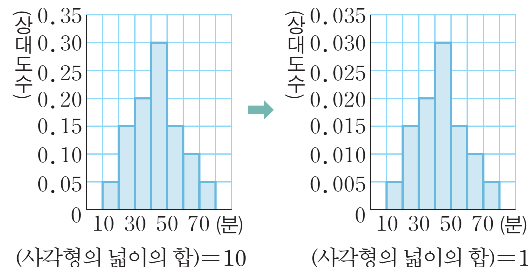
[3] $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

- 교과서 160쪽에서 설명한 이산확률변수에 대한 확률질량함수의 성질과 여기서 설명하는 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 성질은 같다.
  즉, 확률질량함수의 성질에서 합의 기호 $\sum$를 적분 기호 $\int$로 바꾸어 놓으면 확률밀도함수의 성질임을 알 수 있다.
- 이산확률변수에서와는 달리 연속확률변수에서는 다음 사건의 확률은 모두 같다.
  즉, 사건
  $$a < X \le b,\ a < X < b$$
  $$a \le X < b,\ a \le X \le b$$
  에 대하여
  $$\mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a \le X \le b)$$

- 연속확률변수와 확률밀도함수를 보다 엄밀하게 도입하면 다음과 같다.
  확률변수 X에 대응하는 분포함수
  $$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$$
  가 다음과 같은 적분으로 표현될 수 있을 때, X를 연속확률변수라고 한다.
  $$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$
  여기서 피적분함수 $f(t)$를 확률밀도함수라고 한다. 이때, 확률밀도함수 $f(t)$는
  (1) $f(t) \ge 0$
  (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
  을 만족한다.

보충 학습

연속확률변수에 대하여 상대도수의 히스토그램을 작성할 때, y축의 척도(scale)를 계급의 크기로 나누어서 생각하는 것이 좋다. 왜냐하면 y축의 척도를 계급의 크기로 나누어야 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이 되기 때문이다.



(사각형의 넓이의 합)=10　　(사각형의 넓이의 합)=1

함께하기 / 해설

1 확률밀도함수의 성질

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=1$$

을 이용한다.

여기서 구간 $[\alpha,\ \beta]$는 확률밀도함수 $f(x)$의 정의역이다.

164

함 께 하 기 / 익힘책 131쪽 | 익힘책 132쪽 | 익힘책 133쪽



1 어떤 역에서 지하철을 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때, 물음에 답하여라.

$$f(x)=kx(10-x)\ (\text{단, } 0\le x\le 10)$$

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이하일 확률을 구하여라.

풀이

(1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로 $\int_0^{10} f(x)dx=1$

즉, $\int_0^{10} kx(10-x)dx=1$이므로

$$\left[-\frac{k}{3}x^3+5kx^2\right]_0^{10}=\frac{500}{3}k=1$$

$$\therefore k=\mathbf{\frac{3}{500}}$$

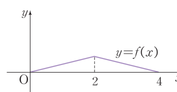
기다리는 시간이 3분 이하 $\Longleftrightarrow 0\le X\le 3$

(2) $\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_0^3 \frac{3}{500}x(10-x)dx$

$$=\frac{3}{500}\left[-\frac{1}{3}x^3+5x^2\right]_0^3=\mathbf{0.216}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 131쪽 | 익힘책 132쪽 | 익힘책 133쪽

1 어떤 백화점에서 계산을 하기 위해 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(2)$의 값을 구하여라.

(2) 기다리는 시간이 3분 이내일 확률을 구하여라.

2 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=k\ (2\le x\le 6)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프를 그려라.

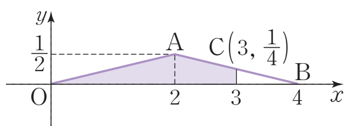
(3) $\mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$를 구하여라.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\frac{1}{2}\times 4\times f(2)=1$

$$\therefore f(2)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) 구하는 확률은 아래 그림에서 색칠된 부분의 넓이이다. 점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 A, 점 $(4,\ 0)$을 B라고 하면 선분 AB와 직선 $x=3$이 만나는 점 C의 좌표는 $\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$이다.



$$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 3)=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}$$

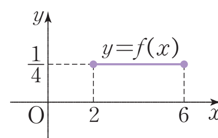
$$=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

2 (1) $\int_2^6 k\,dx=\Big[kx\Big]_2^6$

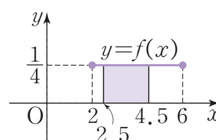
$$=(6-2)k=1$$

$$\therefore k=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}\ (2\le x\le 6)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) $\mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$는 오른쪽 그림에서 색칠된 부분의 넓이와 같다.



$\therefore \mathrm{P}(2.5\le X\le 4.5)$

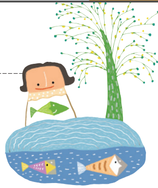
$$=\int_{2.5}^{4.5}\frac{1}{4}dx=\left[\frac{1}{4}x\right]_{2.5}^{4.5}$$

$$=(4.5-2.5)\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

165

2 평균과 표준편차

학습 목표
- 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
- 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 이해한다.



1 확률분포

다 가 서 기 / 기대되는 금메달



우리나라는 2008년 베이징 올림픽에서 금메달 13개, 은메달 10개, 동메달 8개로 총 31개의 메달을 획득하였다. 이것은 금메달의 개수가 1988년 서울 올림픽 이후부터 2004년 아테네 올림픽까지의 평균을 뛰어넘는 좋은 성적이다.

년도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
합계		48	52	47	147
평균		9.6	10.4	9.4	29.4

소단원의 학습 목표

1. 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
2. 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.
3. 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

기댓값, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$

다가서기 / 해설

평균은

$$(\text{평균})=\frac{(\text{모든 자료의 총합})}{(\text{자료의 개수})}$$

으로 1988년 서울 올림픽 이후부터 2008년 베이징 올림픽까지 우리나라가 획득한 금메달의 수의 평균을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{12+12+7+8+9+13}{6}$$

$$=\frac{61}{6}\fallingdotseq 10.2(\text{개})$$

같은 방법으로 은메달의 수와 동메달의 수의 평균을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
2008	베이징	13	10	8	31
합계		61	62	55	178
평균		10.2	10.3	9.2	29.7

또 1994년 릴레함메르 동계 올림픽 이후부터 2010년 밴쿠버 올림픽까지 우리나라가 획득한 금메달, 은메달, 동메달의 수와 각각의 평균은 다음 표와 같다.

연도	개최지	금(개)	은(개)	동(개)	합계
1994	릴레함메르	4	1	1	6
1998	나가노	3	1	2	6
2002	솔트레이크시티	2	2	0	4
2006	토리노	6	3	2	11
2010	밴쿠버	6	6	2	14
합계		21	13	7	41
평균		4.2	2.6	1.4	8.2

탐구하기 / 풀이

(i) 게임 1을 택한 경우

각 게임에서 졌을 때 생길 수 있는 손해를 알아보고 손해가 가장 적은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 손해는 1000원, 게임 2의 손해는 5000원, 게임 3의 손해는 2000원이기 때문이다.

(ii) 게임 2를 택한 경우

각 게임에서 이겼을 때 생길 수 있는 이익을 알아보고 이익이 가장 많은 게임을 택한 것이다. 게임 1의 이익은 1000원, 게임 2의 이익은 5000원, 게임 3의 이익은 3000원이기 때문이다.

(iii) 게임 3을 택한 경우

각 게임에서 얻을 수 있는 평균 이익을 생각하고 그 값이 가장 큰 게임을 택한 것이다. 게임 1과 게임 2의 평균 이익은 0원이고, 게임 3의 평균 이익은 500원이기 때문이다.

어느 게임을 택하더라도 그 이유가 합리적이면 된다.

166

01 이산확률변수의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 최선의 선택

오른쪽 표는 세 가지의 동전 던지기 게임에 대한 상금을 나타낸 것이다. 이를테면 게임 1은 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 1000원을 받고, 뒷면이 나오면 1000원을 주는 것이다. 세 가지의 게임 중에서 각자 하고 싶은 게임을 택하고, 택한 이유를 말하여 보자.

게임	앞면	뒷면
게임 1	+1000원	−1000원
게임 2	+5000원	−5000원
게임 3	+3000원	−2000원

알 아 보 기 / 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산 및 표준편차를 알아보자.

오른쪽 표와 같이 상금이 걸린 100장의 복권에서 상금의 평균은

$$\frac{10000\times1+5000\times5+1000\times55+0\times39}{100}$$

$=900$(원) ······ ㉠

이다. 여기서 복권 한 장에 대한 상금을 확률변수 X라고 할 때, ㉠의 좌변은 X의 각 값과 그에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉

$$10000\times\frac{1}{100}+5000\times\frac{5}{100}+1000\times\frac{55}{100}+0\times\frac{39}{100}=900(\text{원})$$

이때, 상금의 평균 900원은 복권을 1장 살 때 상금으로 기대할 수 있는 값이다.

상금(원)	복권 수(장)
10000	1
5000	5
1000	55
0	39
합계	100

확률변수 X의 확률분포

X	$\mathrm{P}(X=x)$
10000	$\frac{1}{100}$
5000	$\frac{5}{100}$
1000	$\frac{55}{100}$
0	$\frac{39}{100}$
합계	1

일반적으로 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같이 주어졌다고 하자.

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n	1

이때, $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 E는 Expectation의 첫 글자이다.

알아보기 / 해설

확률변수의 평균, 분산 및 표준편차는 도수분포표에서의 평균, 분산 및 표준편차와 연관지어서 생각하면 편리하다.

다음 도수분포표에서 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

계급값	x_1	x_2	…	x_n	합계
도수	f_1	f_2	…	f_n	N
상대도수	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	…	$\frac{f_n}{N}$	1

평균은

$$(\text{평균})=\frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=m$$

이때, 상대도수 $\frac{f_i}{N}=p_i$라고 하면

$$(\text{평균})=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

즉, 도수분포표에서 계급값을 확률변수 X의 값으로, 상대도수를 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$로 생각하면

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

이다.

167

> 도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.
>
> 혼동이 없을 때는 $\mathrm{E}(X)$를 간단히 m으로 쓴다. 이때, m은 mean의 첫 글자이다.
>
> 일반적으로 확률변수 X의 기댓값을 $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 편차의 제곱 $(X-m)^2$은
>
> $$(x_1-m)^2,\ (x_2-m)^2,\ \cdots,\ (x_n-m)^2$$
>
> 의 값을 가지는 확률변수로서, X가 m으로부터 떨어진 정도를 나타낸다.
>
> 이때, $(X-m)^2$의 기댓값을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로
>
> $$\mathrm{V}(X)$$
>
> 와 같이 나타낸다.
>
> 분산 $\mathrm{V}(X)$의 V는 Variance의 첫 글자이다.
>
> 확률변수 X의 확률분포가
>
> $$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (\text{단, } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$
>
> 일 때, 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2\end{aligned}$$
>
> $\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\mathrm{E}(X)=m$
>
> $\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i=\mathrm{E}(X^2)$
>
> 과 같이 계산한다.
>
> 또 분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로
>
> $$\sigma(X)$$
>
> 와 같이 나타낸다. 즉
>
> $$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$
>
> 이다.
>
> 표준편차 σ(sigma)는 standard deviation의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.
>
> 이상을 정리하면 다음과 같다.
>
> **이산확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차**
>
> (1) 평균 $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$
>
> (2) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-m^2$
>
> (3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\mathrm{E}((X-m)^2)\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

분산은

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\frac{\{(\text{편차})^2\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}\\&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i}{N}\end{aligned}$$

이때, 상대도수 $\frac{f_i}{N}=p_i$라고 하면

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\frac{f_i}{N}\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\end{aligned}$$

따라서 확률변수 X가 가지는 값이 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이고 각각 대응하는 확률이 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$일 때, X의 확률분포를 나타낸 표와 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

보충 학습

분산과 표준편차는 모두 산포도를 나타낸다. 그런데 분산의 단위는 확률변수 X의 측정값 단위의 제곱이고, 표준편차의 단위는 측정값의 단위와 같다. 그러므로 실제로 통계에서는 표준편차가 많이 쓰인다.

예를 들어 확률변수 X가 사람들의 키를 나타낼 때, 측정값은 170 cm, 165 cm, 173 cm, … 등으로 그 단위가 cm이다.

이때, 평균 $m=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$의 단위도 cm이다.

한편 분산 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$에서 $(x_i-m)^2$이므로 그 단위는 cm^2가 된다.

그러나 표준편차는 $\sqrt{(\text{분산})}$이므로 그 단위는 cm임을 알 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 $\mathrm{E}(X)$

$=(-2)\times0.1+(-1)\times0.2$
$+0\times0.35+1\times0.3+2\times0.05$

$=-0.2-0.2+0+0.3+0.1$

$=\mathbf{0}$

$\mathrm{V}(X)$

$=(-2)^2\times0.1+(-1)^2\times0.2$
$+0^2\times0.35+1^2\times0.3$
$+2^2\times0.05-0^2$

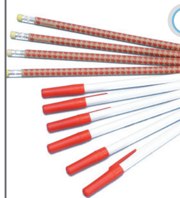
$=0.4+0.2+0+0.3+0.2-0$

$=\mathbf{1.1}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{1.1}}$

168

함 께 하 기 / 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽 | 익힘책 137쪽



1 볼펜 6자루와 연필 4자루 중 임의로 2개를 고를 때 나오는 연필의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

풀이

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

한편 $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$이므로 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-m^2=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{32}{75}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{15}}$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽 | 익힘책 137쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

2 세 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

2 세 개의 동전을 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간은

{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH}

(ⅰ) 앞면이 나오는 개수가 0개인 경우는 {TTT}의 1가지

(ⅱ) 앞면이 나오는 개수가 1개인 경우는 {TTH, THT, HTT}의 3가지

(ⅲ) 앞면이 나오는 개수가 2개인 경우는 {THH, HTH, HHT}의 3가지

(ⅳ) 앞면이 나오는 개수가 3개인 경우는 {HHH}의 1가지

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}$$
$$+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

02 연속확률변수의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 알아보자.

이산확률변수에서 쓰이는 $\sum$와 연속확률변수에서 쓰이는 $\int$은 같은 성질을 가지고 있다.

이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 개념을 연속확률변수에 적용하여 보자.

연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가지고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 정의한다.

연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차

(1) 평균 $\mathrm{E}(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)dx=m$

(2) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx$

$=\int_\alpha^\beta x^2 f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

주어진 정의역 이외에서는 $f(x)=0$으로 생각한다.

| 보기 | 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x\ (0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차는

$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

스 스 로 하 기 / 익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽 | 익힘책 137쪽

1 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=3x^2\ (0\le x\le 1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1\le x\le 0)\\ 1-x & (0\le x\le 1)\end{cases}$

일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^0 x(1+x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx$

알아보기 / 해설

미적분에서 합의 기호 $\sum$와 적분 기호 $\int$은 같은 성질을 가지고 있음을 배웠다.

마찬가지로 연속확률변수의 평균과 분산을 정의할 때에는 이산확률변수의 평균과 분산의 정의에서 합의 기호 $\sum$를 적분 기호 $\int$로 바꾸면 된다.

즉, 다음을 알 수 있다.

구분	이산확률변수	연속확률변수
평균	$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$\int_\alpha^\beta xf(x)dx$
분산	$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$	$\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx$

스스로 하기 / 풀이

1 $\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2 dx$

$=\int_0^1 3x^3 dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1=\mathbf{\frac{3}{4}}$

$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2 dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\int_0^1 3x^4 dx-\frac{9}{16}$

$=\left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1-\frac{9}{16}=\mathbf{\frac{3}{80}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{80}}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{20}}$

2 $\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^0 x(1+x)dx$

$+\int_0^1 x(1-x)dx$

$=\int_{-1}^0 (x+x^2)dx$

$+\int_0^1 (x-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0$

$+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\mathbf{0}$

$\mathrm{V}(X)=\int_{-1}^0 x^2(1+x)dx$

$+\int_0^1 x^2(1-x)dx-0^2$

$=\int_{-1}^0 (x^2+x^3)dx+\int_0^1 (x^2-x^3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{6}}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{6}}$

탐구하기 / 풀이

1. $Y=X-1$이므로 X의 값이 $0,\ 1,\ 2$일 때 Y의 값은 각각 $-1,\ 0,\ 1$이다.
따라서 Y의 확률분포표는 다음과 같다.

Y	-1	**0**	**1**	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	1

2. X의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}$$
$$=\mathbf{1}$$

Y의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(Y)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}$$
$$=\mathbf{0}$$

따라서 **$\mathrm{E}(Y)$는 $\mathrm{E}(X)$보다 1만큼 작다.**

3. $Z=2X$이므로 X의 값이 $0,\ 1,\ 2$일 때 Z의 값은 각각 $0,\ 2,\ 4$이다.
따라서 Z의 확률분포표는 다음과 같다.

Z	0	**2**	**4**	합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	1

4. X의 확률분포표에서

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Z의 확률분포표에서

$$\mathrm{E}(Z)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=2$$
$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{E}(Z^2)-\{\mathrm{E}(Z)\}^2$$
$$=0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}-2^2=\mathbf{2}$$

따라서 **$\mathrm{V}(Z)$는 $\mathrm{V}(X)$ 4배이다.**

170

03 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

탐 구 하 기 / 확률변수 $X-1$과 $2X$

오른쪽 표는 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1. 오른쪽 표는 $Y=X-1$이라고 할 때, Y의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Y	-1			합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$			1

2. $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.
3. 오른쪽 표는 $Z=2X$라고 할 때, Z의 확률분포를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

Z	0			합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{4}$			1

4. $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Z)$를 각각 구하고, 이들을 비교하여라.

알 아 보 기 / 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차의 성질을 알아보자.

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 일차식으로 표시된 확률변수 $Y=aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)를 생각하여 보자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때, $y_i=ax_i+b$라고 하면 $\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$이므로 확률변수 Y의 평균은

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b$$

이고, $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 Y의 분산은

$$\mathrm{V}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\mathrm{E}(Y)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$$
$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)$$

Σ와 $\int$의 성질이 같음을 이용하면 연속확률변수에서도 이와 같은 성질이 성립함을 밝힐 수 있다.

알아보기 / 해설

평균, 분산 및 표준편차의 성질을 예를 통해 알아보자.
A 학급 학생들의 시험 성적의 평균이 40점, 표준편차가 5점이다. 즉, A 학급 학생들의 시험 성적을 확률변수 X라고 하면

$$\mathrm{E}(X)=40,\ \sigma(X)=5$$

(i) A 학급 학생들의 점수를 모두 5점씩 올리면 올린 점수는 $X+5$이므로

$$\mathrm{E}(X+5)=\mathrm{E}(X)+5=45$$
$$\sigma(X+5)=\sigma(X)=5$$

따라서 반의 평균은 40점에서 45점으로 올라가지만 표준편차는 편차의 크기와 관계된 것이므로 그대로 5점이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}$
$=\sqrt{a^2V(X)}$
$=|a|\sigma(X)$

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b$ ($a\neq0$, b는 상수)에 대하여

(1) 평균 $E(aX+b)=aE(X)+b$

(2) 분산 $V(aX+b)=a^2V(X)$

(3) 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

| **보기** | 확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라고 할 때, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$의 평균 $E(Z)$와 분산 $V(Z)$를 구하면

$$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=E\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{m}{\sigma}=\frac{m}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}=0$$
$$V(Z)=V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=V\left(\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}\right)$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

스스로 하기 /

익힘책 135쪽 | 익힘책 136쪽 | 익힘책 137쪽

1 $E(X)=50$, $V(X)=25$일 때, 다음 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $X+10$ (2) $5X+10$

2 평균이 m, 표준편차가 σ인 시험의 원점수 X를 다음과 같이 T 점수로 바꿀 때, 물음에 답하여라.

$$T=10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

(1) T 점수의 평균과 표준편차를 구하여라.

(2) 오른쪽 표는 어느 학교 학생들의 국어 시험과 수학 시험의 평균 및 표준편차이다. 이 시험에서 영주의 국어 점수와 수학 점수는 모두 72점이었다. 영주의 국어 점수와 수학 점수에 대한 T 점수를 구하고 이를 비교하여라.

	평균	표준편차
국어	60	10
수학	40	16

(ii) A 학급 학생들의 점수를 모두 2배로 올리면 올린 점수는 $2X$이므로

$$E(2X)=2E(X)=80$$

그러므로 반의 평균은 40점에서 80점으로 올라간다.

이때, 한 학생의 점수가 45점이었다면 2배를 하기 전의 편차는 $45-40=5$(점)이지만 2배를 한 후의 편차는 $90-80=10$(점)으로 2배가 된다. 따라서 편차가 2배가 되므로 표준편차도 2배가 되어 10점이 된다. 즉,

$$\sigma(2X)=|2|\sigma(X)=10$$

이와 같이 확률변수 X가 $Y=aX+b$의 꼴로 바뀌면 $E(Y)$는 a, b의 값 모두에 영향을 받지만 $V(Y)$, $\sigma(Y)$는 a의 값에만 영향을 받는다.

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $E(X+10)=E(X)+10$
$=50+10=\mathbf{60}$

$V(X+10)=V(X)=\mathbf{25}$

$\sigma(X+10)=\sigma(X)=\mathbf{5}$

(2) $E(5X+10)=5E(X)+10$
$=5\times50+10$
$=\mathbf{260}$

$V(5X+10)=25V(X)$
$=25\times25=\mathbf{625}$

$\sigma(5X+10)=5\sigma(X)$
$=5\times5=\mathbf{25}$

2 (1) $E(T)$

$$=E\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)$$
$$=E\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10}{\sigma}m+50\right)$$
$$=\frac{10}{\sigma}E(X)-\frac{10}{\sigma}m+50$$
$$=\frac{10}{\sigma}m-\frac{10}{\sigma}m+50=\mathbf{50}$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10}{\sigma}m+50\right)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\sigma(X)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=\mathbf{10}$$

(2) 국어 점수 :

$$T=10\times\frac{72-60}{10}+50=\mathbf{62}(\text{점})$$

수학 점수 :

$$T=10\times\frac{72-40}{16}+50$$
$$=\mathbf{70}(\text{점})$$

국어와 수학에서 같은 점수 72점을 받았지만 T 점수에 의하면 **수학 점수가 70점으로 국어 점수 62점보다 더 높다.**

공학 도구 / 해설

엑셀 프로그램에서 편집 화면에 있는 각각의 직사각형을 셀(cell)이라고 부른다. 셀은 세포를 뜻하는 단어인데, 엑셀의 각 직사각형이 마치 세포막을 형성한 것과 같아 보여 셀이라고 이름 지어졌다.

셀의 주소는 열의 번지와 행의 번지로 구성되어 있는데 열의 번지는 왼쪽에서 오른쪽으로 A, B, C, …의 알파벳으로, 행의 번지는 위에서 아래로 1, 2, 3, …의 숫자로 표시되어 있다. 본문의 예에서 8/15은 3열 2행, 즉 C2 셀에 기록되어 있으며, D3 셀에는 0.266666667이 기록되어 있다.

172

공 학　도 구

컴퓨터 프로그램을 이용하여 이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 168쪽의 함께하기 **1**에 주어진 확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 구할 수 있다.

1. 확률분포를 입력하여 보자.

❶ A1 셀에 확률변수 'x'를 입력하고 B1, C1, D1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 E1 셀에 '합계'를 입력한다.

❷ A2 셀에 확률변수 'P(x)'를 입력하고 B2, C2, D2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 또 마우스 끌기를 하여 B2~D2 셀을 선택한 후 수식 메뉴의 자동 합계(∑) 아이콘을 클릭하면 E2 셀에 SUM(B2:D2), 즉 B2 셀부터 D2 셀까지의 합이 계산된다.

E2　=SUM(B2:D2)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3						

2. 평균을 계산하여 보자.

❶ A3 셀에 'x·P(x)'를 입력한다.

❷ B3 셀에 '=B1 * B2'를 입력하고 Enter 키를 누른다.

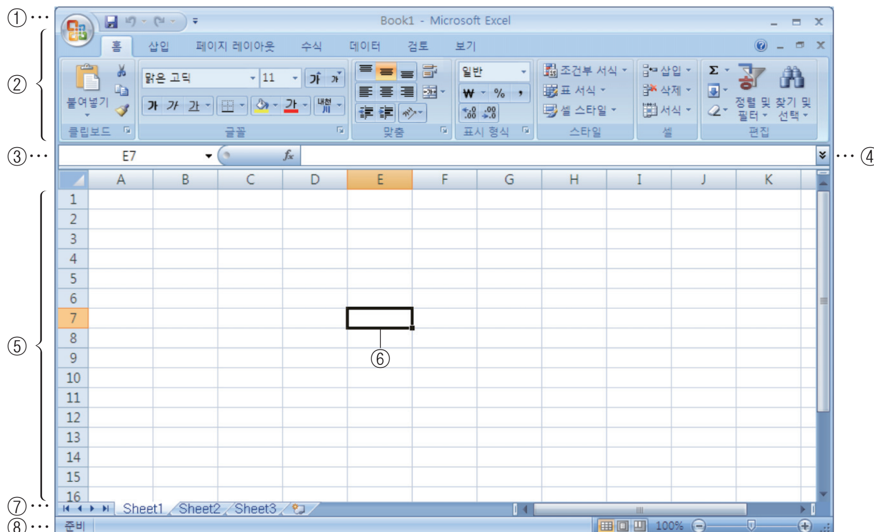
❸ B3 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+) 표시로 바뀐다. 이때, 마우스 끌기를 하여 D3 셀까지 선택하면 C3, D3 셀에 자동으로 나머지 '=C1 * C2', '=D1 * D2'가 각각 입력된다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B3~D3 셀을 선택한 후 자동 합계(∑) 아이콘을 클릭한다. 이렇게 하면 E3 셀에 SUM(B3:D3), 즉 E(X)의 값이 계산된다.

E3　=SUM(B3:D3)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	

참고 | 엑셀 2007의 화면 구성



173

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

3. 분산과 표준편차를 계산하여 보자.

❶ A4 셀에 '$x^2 \cdot \mathrm{P}(x)$' 를 입력한다.

❷ B4 셀에 '=B1^2 * B2' 를 입력한 뒤 Enter 키를 누른다.

❸ B4 셀의 오른쪽 끝에 커서를 놓으면 커서가 십자(+) 표시로 바뀐다. 이때, 마우스 끌기를 하여 D4 셀까지 선택하면 나머지 셀의 값이 자동으로 입력된다.

❹ 마우스 끌기를 하여 B4~D4 셀을 선택한 후 자동 합계(∑) 아이콘을 클릭한다. 그러면 E4 셀에 SUM(B4:D4), 즉 $\mathrm{E}(X^2)$의 값이 계산된다.

E4 | =SUM(B4:D4)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x²·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						

❺ B6 셀에 '$\{\mathrm{E}(X)\}^2$' 을 입력하고, C6 셀에 '=E3^2' 를 입력한다.

❻ B8 셀에 '$\mathrm{V}(X)$' 를 입력하고, C8 셀에 '=E4−C6' 을 입력한다. 그러면 C8 셀에 $\mathrm{V}(X)$의 값이 계산된다.

❼ B10 셀에 '표준편차' 를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)' 을 입력한다. 그러면 C10 셀에 표준편차의 값이 계산된다.

C10 | =SQRT(C8)

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	2	합계	
2	P(x)	1/3	8/15	2/15	1	
3	x·P(x)	0	0.533333333	0.266666667	0.8	
4	x²·P(x)	0	0.533333333	0.533333333	1.066666667	
5						
6		{E(x)}²	0.64			
7						
8		V(x)	0.426666667			
9						
10		표준편차	0.653197265			
11						

① 제목 표시줄: 현재 사용하고 있는 파일 이름과 프로그램 이름이 표시되는 곳이다.

② 리본 메뉴: 액셀 2007에서 제공하는 여러 가지 명령에 관한 명령 아이콘들을 모아둔 곳이다.

③ 이름 상자: 현재 셀 포인터의 셀 주소를 보여주며, 함수를 사용할 때는 함수명을 보여준다.

④ 수식 입력줄: 셀에 데이터나 수식을 입력하고, 입력되어 있는 데이터나 수식을 보여주는 곳이다.

⑤ 워크시트 창: 내용을 작성하고 편집하는 곳이다.

⑥ 셀 포인터: 선택한 현재 셀을 의미한다.

⑦ 시트 탭: 통합 문서를 구성하는 시트들을 나타내는 곳으로, 각 시트들의 이름이 표시되는 곳이다.

⑧ 상태 표시줄: 현재 작업 영역의 명령에 대한 정보를 알려준다.



Plus 문제

엑셀 프로그램을 이용하여 교과서 168쪽의 스스로 하기 1에 주어진 확률변수의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

| 풀이 |

(1) 확률변수 X의 확률분포를 입력한다.

Book1 - Microsoft Excel

G2 | =SUM(B2:F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1

(2) 평균 $\mathrm{E}(X)$를 계산한다.

Book1 - Microsoft Excel

G3 | =SUM(B3:F3)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0

(3) 분산 $\mathrm{V}(X)$를 계산한다.

Book1 - Microsoft Excel

G4 | =SUM(B4:F4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x²·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1

이상에서 다음을 알 수 있다.

$\mathrm{E}(X^2)=1.1,\ \{\mathrm{E}(X)\}^2=0$

따라서 다음과 같이 분산과 표준편차를 구할 수 있다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1.1-0=1.1$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

$=\sqrt{1.1}\fallingdotseq 1.04881$

(4) 위의 결과를 정리하면 다음과 같다.

Book1 - Microsoft Excel

D8 | =SQRT(D7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	합계
2	P(x)	0.1	0.2	0.35	0.3	0.05	1
3	x·P(x)	-0.2	-0.2	0	0.3	0.1	0
4	x²·P(x)	0.4	0.2	0	0.3	0.2	1.1
5							
6			{E(x)}²	0			
7			V(x)	1.1			
8			표준편차	1.04881			

소단원의 학습 목표

1. 이항분포의 뜻을 안다.
2. 이항분포의 확률분포를 표로 나타낼 수 있다.
3. 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
4. 이항분포의 분포표와 그래프를 이해한다.
5. 큰 수의 법칙을 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

이항분포, $\mathrm{B}(n,\ p)$, 큰 수의 법칙

1 확률분포

3 이항분포



학습 목표

- 이항분포의 뜻을 안다.
- 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포의 분포표와 그래프를 이해한다.
- 큰 수의 법칙을 이해한다.

다 가 서 기 / 항공권 예약



항공사에서는 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우에 대비하여 적절한 인원만큼 초과하여 항공권을 팔기도 한다. 이때에 적용되는 모형이 이 단원에서 다루는 이항분포이다.

손님을 좌석의 수보다 적게 탑승시키면 손실이 생기고, 손님을 좌석의 수보다 많게 탑승시키면 좌석이 부족하므로 항공사에서는 항상 적절한 수학 모형을 사용하여 항공권 예약을 받는다.

다가서기 / 해설

비행기는 버스 또는 기차와는 달리 예약을 하였더라도 공항에서 티켓을 발권할 때 좌석을 배정받는다. 그 이유는 여러 가지가 있겠지만 일반 육상 교통과는 달리 기후에 많은 영향을 받기 때문에 불가피한 사태에 대비하여 좌석을 배정하지 않기도 하고, 노약자 등을 위한 좌석도 배정하면서 비상시에 도움을 얻고자 비상구 옆에는 젊고 건장한 사람을 배정하는 것이 관례이기 때문이다.

한편 티켓을 예약한 후 아무런 사전 통보 없이 탑승하지 않는 사람도 있기 때문에 (이것을 no-show라고 한다.) 항공사 측에서는 경영상의 이유로 좌석이 비어 있을 경우를 대비하여 좌석의 수보다 많은 예약을 받는 오버부킹(overbooking)을 하기도 한다.

만약 어느 항공사의 no-show율이 5 %이고 200명 정원인 비행기 노선이 있다면 항공사는 대략 10명 정도가 안 나올 것으로 예상하고 210명의 예약을 받게 된다.

예상대로 10명 이상이 공항에 나오지 않으면 다행이지만, 그렇지 않은 경우에는 어떻게 될까?

이러한 경우에는 리컨펌(reconfirm, 예약 내용을 다시 확인하는 것)한 사람이 우선이다. 그러나 리컨펌을 하였더라도 비행기 탑승에 필요한 시간 내에 좌석을 배정받아야 한다.

통상적으로 출발 시간 기준으로 적어도 국내선은 1시간, 국제선은 2시간 전에는 수속 및 탑승을 완료하여야 한다.

최근에는 no-show율이 낮아지는 추세여서 대부분의 항공사는 오버부킹을 거의 하지 않는다. 그래도 비행기를 타기 전까지 예약이 제대로 되었는지 확인하고, 탑승 및 수속 시간을 지키는 것이 즐거운 여행이 되는 첫걸음이 될 것이다.

175

01 이항분포의 뜻

탐 구 하 기 / 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수의 관찰



한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오면 ○표, 그 외의 눈이 나오면 ×표를 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○		

알 아 보 기 / 이항분포의 뜻을 알아보자.

1의 눈이 1번 나오는 경우

1회	2회	3회	4회
×	×	×	○
×	×	○	×
×	○	×	×
○	×	×	×

확률: ${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}$

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 독립시행의 확률에 의하여 다음이 성립한다.

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일반적으로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 0, 1, 2, …, n의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률분포는 다음과 같다.

$$P(X=x)={}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때, $q=1-p$라고 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	…	x	…	n	합계
$P(X=x)$	${}_nC_0\,q^n$	${}_nC_1\,pq^{n-1}$	${}_nC_2\,p^2q^{n-2}$	…	${}_nC_x\,p^xq^{n-x}$	…	${}_nC_n\,p^n$	1

$\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x p^xq^{n-x}=(q+p)^n=1$

이 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(q+p)^n$을 전개한 다음 식의 우변의 각 항과 같다.

$$(q+p)^n={}_nC_0\,q^n+{}_nC_1\,pq^{n-1}+\cdots+{}_nC_x\,p^xq^{n-x}+\cdots+{}_nC_n\,p^n$$

이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$B(n,\ p)$$

와 같이 나타낸다.

이항분포 $B(n,\ p)$에서 B는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

탐구하기 / 풀이

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 1의 눈이 2번, 3번 나오는 경우는 각각 다음과 같다.

2번: ××○○, ×○×○, ×○○×
　　○××○, ○×○×, ○○××

3번: ×○○○, ○×○○, ○○×○, ○○○×

따라서 주어진 표를 완성하면 다음과 같다.

네 번의 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수				
0번	1번	2번	3번	4번
××××	×××○	××○○	×○○○	○○○○
	××○×	×○×○	○×○○	
	×○××	×○○×	○○×○	
	○×××	○××○	○○○×	
		○×○×		
		○○××		

알아보기 / 해설

한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=0$인 경우는 ××××의 1가지가 있다.
이때, 각각의 결과는 서로 영향을 주지 않으므로 확률은

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\therefore P(X=0)={}_4C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

(ii) $X=1$인 경우는 ×××○, ××○×, ×○××, ○×××의 4가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$이다.
따라서 확률은

$$P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

(iii) $X=2$인 경우는 ××○○, ×○×○, ×○○×, ○××○, ○×○×, ○○××의 6가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.
따라서 확률은

$$P(X=2)={}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(iv) $X=3$인 경우는 ×○○○, ○×○○, ○○×○, ○○○×의 4가지가 있고, 이들 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$이다.
따라서 확률은

$$P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

(v) $X=4$인 경우는 ○○○○의 1가지가 있고, 그 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$이다.
따라서 확률은 $P(X=4)={}_4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0$

보충 학습

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 경우는 어떤 시행이 독립적으로 반복될 때이다. 그 예로는 주사위나 동전 등을 반복하여 던지는 경우, 사건이 일어난 후 시행 전의 상태로 되돌려 다시 시행하는 경우, 일정한 비율이 주어져 있는 경우 등이 있다. 이처럼 독립적으로 반복되는 시행의 특징은

(ⅰ) 같은 시행을 여러 번 반복한다.

(ⅱ) 각 시행에서 매회 어떤 사건이 일어날 확률이 일정하다.

(ⅲ) 각 시행의 결과는 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 받지 않는다.

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

| 보기 | 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{6}\right)$이다.

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$	1

함 께 하 기 /

익힘책 139쪽 | 익힘책 140쪽 | 익힘책 141쪽



1 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않는 경우가 20명 중 1명 꼴이라고 한다. 좌석 수 80에 대하여 82명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.95^{81}=0.0157$, $0.95^{82}=0.0149$로 한다.)

| 풀이 |

예약한 사람이 탑승할 확률은 0.95이다. 그러므로 예약한 82명 중에서 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(82,\ 0.95)$이다. 즉

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{82}\mathrm{C}_x\cdot0.95^x\cdot0.05^{82-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 82)$$

한편 좌석이 부족하게 되는 것은 $X\geq81$인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X\geq81)=\mathrm{P}(X=81)+\mathrm{P}(X=82)$$
$$={}_{82}\mathrm{C}_{81}\cdot0.95^{81}\cdot0.05+{}_{82}\mathrm{C}_{82}\cdot0.95^{82}$$
$$=82\times0.0157\times0.05+1\times0.0149=\mathbf{0.07927}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 139쪽 | 익힘책 140쪽 | 익힘책 141쪽

1 다음 이항분포의 확률분포를 식과 표로 나타내어라.

(1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$　　(2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$

2 어떤 소극장의 공연을 예약한 사람 중에서 사전 통보 없이 오지 않는 사람이 10 %라고 한다. 좌석 수 60에 대하여 62명이 좌석을 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.9^{61}=0.0016$, $0.9^{62}=0.0015$로 한다.)

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$에서 $n=4$, $p=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathbf{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$에서 $n=5$, $p=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathbf{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

이 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$	1

2 예약한 62명 중에서 공연을 보러 오는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면, X의 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}(62,\ 0.9)$이다. 즉,

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{62}\mathrm{C}_x\cdot0.9^x\cdot0.1^{62-x}$$

(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 62$)

좌석 수가 60이므로 61명 이상이 공연을 보러 오면 좌석이 부족하게 된다. 즉, $X\geq61$이면 좌석이 부족하다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq61)$$
$$=\mathrm{P}(X=61)+\mathrm{P}(X=62)$$
$$={}_{62}\mathrm{C}_{61}\cdot0.9^{61}\cdot0.1+{}_{62}\mathrm{C}_{62}\cdot0.9^{62}$$
$$=62\times0.0016\times0.1+1\times0.0015$$
$$=0.00992+0.0015=\mathbf{0.01142}$$

02 이항분포의 평균과 표준편차

알 아 보 기 / 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, 그 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

여기서 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3$$
$$=3pq^2+6p^2q+3p^3=3p(q+p)^2=3p$$
$$\mathrm{V}(X)=0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3-(3p)^2$$
$$=3pq^2+12p^2q+9p^3-9p^2$$
$$=3p\{(q+p)(q+3p)-3p\}=3pq$$

$q=1-p$이므로 $q+p=1$

일반적으로 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

주사위를 한 번 던질 때 1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

| 보기 | 한 개의 주사위를 18번 던질 때, 1 또는 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4,\ \sigma(X)=2$$

스 스 로 하 기 / 익힘책 139쪽 | 익힘책 140쪽 | 익힘책 141쪽

1 다음 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$

2 한 개의 주사위를 36번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

보충 학습

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $x{}_n\mathrm{C}_x=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1},\ x(x-1){}_n\mathrm{C}_x=n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}$ 임을 이용하여 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하여 보자.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=0}^{n}x{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$$
$$=0{}_n\mathrm{C}_0q^n+1{}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}+2{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}+\cdots+n{}_n\mathrm{C}_np^n$$
$$=0+n{}_{n-1}\mathrm{C}_0pq^{n-1}+n{}_{n-1}\mathrm{C}_1p^2q^{n-2}+\cdots+n{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}p^n$$
$$=np\{{}_{n-1}\mathrm{C}_0q^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_1pq^{n-2}+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}\}$$
$$=np(q+p)^{n-1}=np$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{x=0}^{n}x^2{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{n}\{x(x-1)+x\}{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{n}x(x-1){}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}+\sum_{x=0}^{n}x{}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{n}n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}p^xq^{n-x}+np$$
$$=n(n-1)p^2\times\sum_{x=0}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{x-2}p^{x-2}q^{n-x}+np$$
$$=n(n-1)p^2+np$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=n(n-1)p^2+np-(np)^2$$
$$=np(1-p)=npq$$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $n=64,\ p=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{2}=\mathbf{32}$$
$$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{16}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

(2) $n=400,\ p=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=\mathbf{80}$$
$$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{64}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{64}=\mathbf{8}$$

2 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=36\times\frac{1}{2}=\mathbf{18}$$
$$\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{9}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{9}=\mathbf{3}$$

알아보기 / 해설

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 n의 값이 커지면 p의 값에 관계없이 그 분포와 그래프는 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭이 된다.

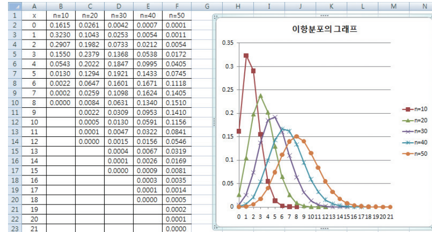
| **그림 1** |에서 보는 바와 같이 n의 값이 작을 때는 한쪽으로 치우친 그래프가 되고, n의 값이 커질 때는 이를테면 $n=50$인 경우에 $np=50\times\frac{1}{6}=8.33\cdots$이므로 직선 $x=8.33\cdots$에 대하여 좌우 대칭인 그래프가 됨을 알 수 있다.

한편 n의 값이 작더라도 p의 값이 0.5에 가까워지면 역시 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭임을 | **그림 2** |를 통하여 알 수 있다. 특히, $p=0.5$이면 어떠한 n의 값에 대해서도 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 그래프는 직선 $x=np$에 대하여 좌우 대칭이 된다.

03 이항분포의 분포표와 그래프

알 아 보 기 / 이항분포의 분포표와 그래프에 대하여 알아보자.

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 $p=\frac{1}{6}$에 대하여 $n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$일 때, 확률분포의 표와 그래프는 다음과 같다.



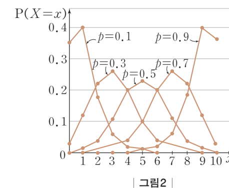
	A	B	C	D	E	F
1	x	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50
2	0	0.1615	0.0261	0.0042	0.0007	0.0001
3	1	0.3230	0.1043	0.0253	0.0054	0.0011
4	2	0.2907	0.1982	0.0733	0.0212	0.0054
5	3	0.1550	0.2379	0.1368	0.0538	0.0172
6	4	0.0543	0.2022	0.1847	0.0995	0.0405
7	5	0.0130	0.1294	0.1921	0.1433	0.0745
8	6	0.0022	0.0647	0.1601	0.1671	0.1118
9	7	0.0002	0.0259	0.1098	0.1624	0.1405
10	8	0.0000	0.0084	0.0631	0.1340	0.1510
11	9		0.0022	0.0309	0.0953	0.1410
12	10		0.0005	0.0130	0.0591	0.1156
13	11		0.0001	0.0047	0.0322	0.0841
14	12		0.0000	0.0015	0.0156	0.0546
15	13			0.0004	0.0067	0.0319
16	14			0.0001	0.0026	0.0169
17	15			0.0000	0.0009	0.0081
18	16				0.0003	0.0035
19	17				0.0001	0.0014
20	18				0.0000	0.0005
21	19					0.0002
22	20					0.0001
23	21					0.0000

| 그림 1 |

뒤에서 배울 이항분포와 정규분포의 관계에서도 이 성질을 활용한다.

| **그림 1** | 에서와 같이 p를 일정하게 하고 n을 크게 하면 이항분포의 그래프는 점차 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

또 | **그림 2** | 에서와 같이 n을 일정하게 하고 p를 0.5에 가깝게 하여도 이항분포의 그래프는 좌우 대칭인 모양에 가까워지는 것을 알 수 있다.



| 그림 2 |

스 스 로 하 기 / 익힘책 139쪽 | 익힘책 140쪽 | 익힘책 141쪽

1 한 개의 주사위를 40번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. | **그림 1** | 의 표를 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(7\le X\le 9)$ (3) $\mathrm{P}(X\ge 15)$

스스로 하기 / 풀이

1 (1) $\mathrm{P}(X\le 2)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=0.0007+0.0054+0.0212$

$=\mathbf{0.0273}$

(2) $\mathrm{P}(7\le X\le 9)$

$=\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)$

$=0.1624+0.1340+0.0953$

$=\mathbf{0.3917}$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 15)$

$=\mathrm{P}(X=15)+\mathrm{P}(X=16)+\mathrm{P}(X=17)$
$\quad+\mathrm{P}(X=18)+\cdots+\mathrm{P}(X=40)$

$=0.0009+0.0003+0.0001+0+\cdots+0$

$=\mathbf{0.0013}$

참고 | 백분율(percentage)과 백분율점(percentage point)

백분율과 백분율점은 혼동하기 쉬운 개념이다. 이를테면 어떤 회사의 이익률이 작년에는 4 %이고 올해에는 7 %이었다면 이익률은 몇 %(percentage) 증가하였다고 볼 수 있는가?

이때, 이익률은

$$\frac{7-4}{4}\times 100=75\ \%(\text{percentage})$$

증가하였다고 하여야 정확한 표현이다. 한편, 이익률이

$$7\ \%(\text{point})-4\ \%(\text{point})=3\ \%(\text{point})$$

(3 percentage point, 3 %점)

증가하였다고 할 수도 있다. 이와 같이 %의 단순 뺄셈에는 백분율점(percentage point)을 사용한다.

179

04 큰 수의 법칙

탐 구 하 기 / 동전 던지기

동전 한 개를 던질 때, 앞면이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 다음과 같은 활동을 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

1. 동전 10개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 1 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 1 | 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

2. 동전 20개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 2 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 2 | 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

3. 동전 30개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복하여 각 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 | 그림 3 | 에 각각 점으로 표시하여라.

| 그림 3 | 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

4. 위의 각 그림에 표시된 10개의 점의 분포 상태를 비교하여라.

알 아 보 기 / 큰 수의 법칙을 알아보자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이라는 것은 실제로 6번 던지면 1의 눈이 꼭 1번 나온다는 뜻이 아니다.

다음 예를 통하여 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라고 할 때, $n=10,\ 30,\ 40$의 각각에 대하여

$$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1,\ \text{즉}\ \frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{n}<\frac{1}{6}+0.1$$

이 성립할 확률을 구하여 보자.

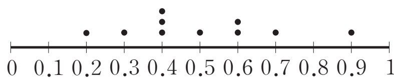
$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1$
$\Longleftrightarrow -0.1<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<0.1$

탐구하기 / 풀이

답안 예시

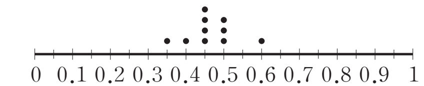
1.

시행 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
앞면의 개수	4	2	9	6	4	5	7	6	3	4
상대 도수	0.4	0.2	0.9	0.6	0.4	0.5	0.7	0.6	0.3	0.4



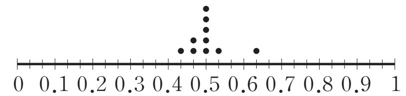
2.

시행 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
앞면의 개수	9	10	7	8	9	10	12	9	9	10
상대 도수	0.45	0.5	0.35	0.4	0.45	0.5	0.6	0.45	0.45	0.5



3.

시행 번호	1	2	3	4	5
앞면의 개수	15	15	14	15	19
상대 도수	0.5	0.5	0.47	0.5	0.63
시행 번호	6	7	8	9	10
앞면의 개수	15	15	16	13	14
상대 도수	0.5	0.5	0.53	0.43	0.47



4. 던지는 동전의 개수가 **10, 20, 30**으로 많아짐에 따라 앞면이 나오는 상대도수는 **0.5**에 밀집됨을 알 수 있다.

즉, $n=30$일 때 0.5에 가깝게 밀집되어 있고, $n=10$일 때는 상대적으로 널리 퍼져 있음을 알 수 있다.

구체적으로 $n=10$인 경우 물음 **1**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는

0.5 ± 0.4

$n=20$인 경우 물음 **2**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는

0.5 ± 0.15

$n=30$인 경우 물음 **3**의 그림에서와 같이 10개의 점이 분포되어 있는 범위는

0.5 ± 0.13

보충 학습

확률 실험은 각 시행마다 그 결과가 다를 수 있다. 그러나 전체 결과의 경향은 비슷하게 나타난다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=50$일 때,

$\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{50}<\frac{1}{6}+0.1$에서

$3.33\cdots<X<13.33\cdots$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{50}<\frac{1}{6}+0.1\right)$$
$$=\mathrm{P}(3.33\cdots<X<13.33\cdots)$$
$$=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\cdots+\mathrm{P}(X=13)$$
$$=0.0405+0.0745+0.1118+0.1405+0.1510+0.1410+0.1156+0.0841+0.0546+0.0319$$
$$=\mathbf{0.9455}$$

178쪽의 이항분포표를 이용한다.

(i) $n=10$일 때, $0.66\cdots<X<2.66\cdots$이므로

$$\mathrm{P}(0.66\cdots<X<2.66\cdots)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=0.3230+0.2907=0.6137$$

(ii) $n=30$일 때, $2<X<8$이므로

$$\mathrm{P}(2<X<8)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)$$
$$=0.1368+0.1847+\cdots+0.1098=0.7835$$

(iii) $n=40$일 때, $2.66\cdots<X<10.66\cdots$이므로

$$\mathrm{P}(2.66\cdots<X<10.66\cdots)$$
$$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)$$
$$=0.0538+0.0995+\cdots+0.0591=0.9145$$

위의 결과에서 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률은 시행 횟수 n이 커질수록 1에 가까워짐을 짐작할 수 있다. 즉, 상대도수와 수학적 확률과의 차가 0.1보다 작게 되는 일은 시행 횟수 n을 크게 함에 따라 그 확실성이 커진다. 이 사실은 0.1을 0.01, 0.001, 0.0001, …로 바꾸어도 마찬가지로 성립한다.

일반적으로 다음과 같은 **큰 수의 법칙**이 성립한다.

큰 수의 법칙

어떤 한 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 아무리 작은 양수 h를 택하더라도 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$$

자연 현상이나 사회 현상과 같이 수학적 확률을 구하기 곤란할 때에는 통계적 확률을 대신 사용한다.

큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 하였을 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다.

스스로 하기 / 익힘책 139쪽 | 익힘책 140쪽 | 익힘책 141쪽



1 알아보기에서 $n=50$일 때, 주어진 조건이 성립할 확률을 구하여라.

보충 학습

상대도수 $\frac{X}{n}$가 가까이 가는 구체적인 값은 무엇인가? 즉, $\frac{X}{n}$의 극한값은 무엇인가?

주사위를 던질 때 1의 눈이 나오는 상대도수의 극한값은 $\frac{1}{6}$이라고 많은 사람들이 의심없이 믿지만, 윷을 던질 때 윷 등이 나오는 상대도수의 극한값은 아무도 언급을 하지 않는다.

그 이유는 주사위 던지기에서는 수학적 확률을 생각하기가 쉽고, 윷 던지기에서는 어렵기 때문이다. 일반적으로 수학적 확률, 즉 통계적 확률의 구체적인 값을 구하기는 매우 어렵다.

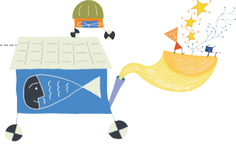
그러나 상대도수 $\frac{X}{n}$의 극한값으로 통계적 확률을 생각할 때 생기는 문제에 대한 답을 여기서 찾을 수 있다.

첫째, $\frac{X}{n}$의 극한값은 실제로 계산할 수 없으므로 (많은 사람들의 생각과 같이) 수학적 확률에 가까이 간다라고 생각한다. 그리고 이러한 상대도수와 수학적 확률의 관계를 본문의 내용과 같이 보여줄 수 있다.

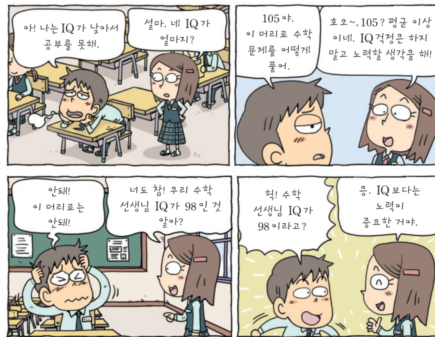
둘째, '충분히 큰 n' 이라는 개념에 대해서도 스스로하기 **1**을 통하여 시사점을 얻을 수 있다. 즉, $n=10$일 때는 $\frac{X}{n}$와 $\frac{1}{6}$의 차이가 0.1 이내일 확률이 0.6137이지만 $n=50$일 때는 0.9455가 된다. 다시 말하면 $n=50$ 정도만 되어도 상대도수와 수학적 확률의 차이는 거의(약 95 % 정도로) 0.1 이내가 된다는 것을 알 수 있다.

4 정규분포

학습 목표
- 정규분포의 뜻을 안다.
- 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
- 표준정규분포의 뜻을 알고, 활용할 수 있다.
- 이항분포와 정규분포의 관계를 이해한다.



다 가 서 기 / **성공의 99 %는 노력의 결과**



지능 지수(IQ)는 지능 검사의 결과로 지능의 정도를 총괄하여 하나의 수치로 나타낸 것이다. 이때, 지능 지수는 평균(m)이 100이고 표준편차(σ)가 15인 정규분포를 따르도록 한다. 즉, 지능 지수가 85~115이면 평균으로부터 1시그마(σ) 안의 범위에 있는 보통의 지능 지수이다.

세상에는 분명 천부적인 재능을 타고난 사람이 있다. 그러나 그들도 모든 면에서 뛰어난 것은 아니다. 어떤 면에서 뛰어난 사람은 자기의 부족한 면을 찾을 줄 알아야 하고, 어떤 면에서 부족한 사람은 자기의 뛰어난 점을 찾을 줄 알아야 한다.

에디슨은 "성공은 1 %의 영감과 99 %의 노력의 결과이다."라고 말하였다.

소단원의 학습 목표

1. 정규분포의 뜻을 안다.
2. 정규분포곡선의 성질을 이해한다.
3. 표준정규분포의 뜻을 알고, 표준정규분포표를 활용할 수 있다.
4. 표준화의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
5. 이항분포와 정규분포의 관계를 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

정규분포, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, **표준정규분포**, $\mathrm{N}(0,\ 1)$, **표준화**

다가서기 / 해설

IQ는 Intelligence Quotient의 약자로, 사람의 지적 능력을 수치적으로 측정하는 시험에 의해 산출되는 점수이다. 이것을 지능 지수라고도 한다.

IQ는 독일의 윌리엄 스턴(William Stern)이 1912년에 어린이들의 인지 능력을 알아보기 위하여 제안한 것을 시초로 볼 수 있다.

한편 미국에서는 비네(Alfred Binet)와 터만(Terman)이 각각 1909년, 1919년에 지능을 정의하였고, 비네의 지능 검사 도구를 이용하여 1920년대 뉴욕에서는 IQ를 기반으로 하여 영재 아동을 판별하였다. 근래에 많이 쓰이는 지능 검사 도구는 웩슬러(Wechsler)가 제안한 것을 통계적으로 일반화시킨 것이다.

IQ에는 비율 지능(ratio IQ)과 편차 지능(deviation IQ)이 있다. 일반적으로 말하는 지능 지수는 편차 지능이다.

편차 지능의 경우는 표준편차를 보통 16으로 사용하는데, 경우에 따라서는 15 또는 24를 사용하기도 한다. 웩슬러 지능 검사에서는 표준편차를 15로 사용하고, 멘사에서는 24를 사용한다.

지능 지수를 말할 때에 표준편차 없이 수치를 정확히 비교할 수 없으므로 지능 지수 검사 도구의 표준편차를 밝히는 것은 중요하다.

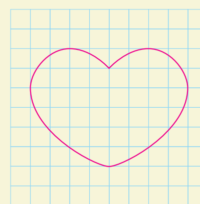
현대에는 지능에 대하여 단일한 방법으로 표현할 수 없다는 주장이 설득력을 얻고 있는데 그 대표적인 것이 가드너(Gardner)의 다중지능(Multiple Intelligence)이론으로서 지능에는 언어적 지능, 음악적 지능, 논리·수학적 지능, 공간적 지능, 신체·운동적 지능, 대인 관계 지능, 개인 내적 지능, 자연 탐구 지능, 영성·실존적 지능이 있다고 한다.

182

01 정규분포의 뜻과 정규분포곡선의 성질

탐 구 하 기 / 측정값의 분포

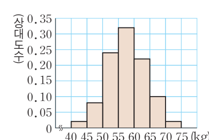
오른쪽 그림의 곡선에 대하여 다음을 알아보자.



1. 곡선의 길이를 구하는 여러 가지 방법을 생각하고, 또 실제로 구하여라.
2. 우리 반 학생들이 물음 1에서 구한 곡선의 길이에 대하여 상대도수의 분포표를 만들어라.
3. 상대도수의 분포표를 히스토그램으로 나타내고, 히스토그램에서 각 직사각형의 윗변의 중점을 곡선으로 연결하여라.
4. 물음 3에서 그린 곡선에 대하여 그 특징을 말하여라.

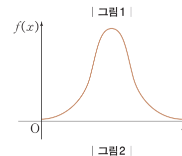
알 아 보 기 / 정규분포의 뜻과 성질을 알아보자.

오른쪽 |그림1|은 어느 고등학교 학생 50명의 몸무게를 조사한 자료에 대한 상대도수의 분포표를 히스토그램으로 나타낸 것이다.



|그림1|

여기서 자료의 수를 충분히 크게 하고 계급의 크기를 작게 하면 히스토그램은 오른쪽 |그림2|와 같은 곡선에 가까워진다.



|그림2|

이와 같이 자연 현상이나 사회 현상을 측정할 때, 그 확률밀도함수의 그래프가 |그림2|와 같은 종 모양의 곡선에 가까운 경우가 많이 있다. 이러한 분포의 곡선을 정규분포곡선이라고 한다.

탐구하기 / 풀이

1. 답안 예시1

곡선 위에 실을 둘러 실의 길이를 측정한다.

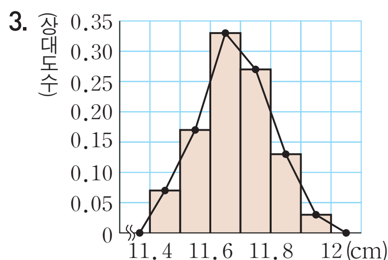
답안 예시2

곡선을 구간으로 쪼개어 생긴 각 부분을 직선으로 생각하여 길이를 측정한 후 합한다.

2. 답안 예시

실의 길이(cm)	학생 수(명)	상대도수
11.4이상 ~ 11.5미만	2	0.07
11.5 ~ 11.6	5	0.17
11.6 ~ 11.7	10	0.33
11.7 ~ 11.8	8	0.27
11.8 ~ 11.9	4	0.13
11.9 ~ 12.0	1	0.03
합계	30	1

3.



4. 종 모양의 곡선에 가깝다.

알아보기 / 해설

- 관찰 또는 측정에는 항상 오차가 따른다. 이를테면 두 지점 사이의 거리를 측정할 때, 측정하는 사람에 따라서 결과에 약간의 차이가 있을 수 있고, 또 같은 사람이 측정하더라도 여러 번 측정하면 그때마다 결과가 달라질 수 있다.

  (오차)=(측정값)−(참값)이고, 참값은 고정된 값이므로 결국 오차의 분포는 측정값의 분포임을 알 수 있다.
- 측정값의 분포를 알아볼 때, 측정값이 많을수록 더 좋은 결과를 얻을 수 있다.

  과거에는 자료를 그림으로 나타내었을 때, 종 모양의 곡선이 나타나지 않으면 이것을 abnormal이라고 하였다.

  이에 대하여 종 모양의 곡선으로 나타나는 자료를 normal이라고 생각한 것에서 정규분포(normal distribution)라는 이름이 유래되었다.

183

연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 식과 같을 때, X는 **정규분포**를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{단, } -\infty<x<\infty)$$

여기서 m과 σ $(\sigma>0)$는 각각 평균과 표준편차를 나타내는 상수이며, e는 그 값이 2.71828…인 무리수이다.

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

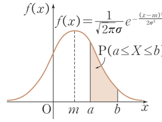
$$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$$

과 같이 나타낸다.

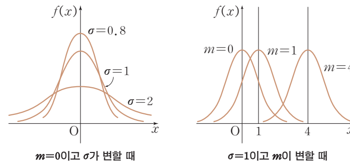
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution의 첫 글자이다.

확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

또 X의 값이 구간 $[a,\ b]$에 있을 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.



한편 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.



$m=0$이고 σ가 변할 때 / $\sigma=1$이고 m이 변할 때

일반적으로 여러 가지 정규분포곡선에서 다음의 성질을 알 수 있다.

정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 점근선은 x축이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

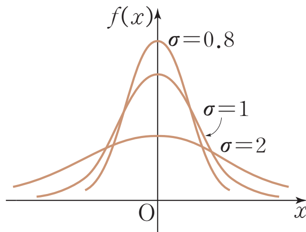
(3) $x=m$일 때, 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 가진다.

(4) m이 일정할 때, 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지고 σ가 작아지면 곡선은 뾰족하게 된다.

(5) σ가 일정할 때, m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

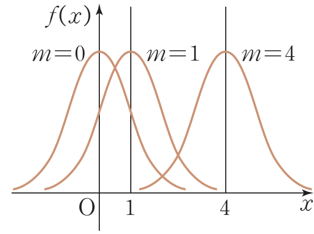
- 정규분포곡선은 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.

(i) $m=0$이고 σ가 변할 때



표준편차 σ는 자료들이 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타내므로 표준편차 σ가 커질수록 곡선의 높이는 낮아지고 양쪽으로 퍼지며, 표준편차 σ가 작아질수록 곡선의 높이는 높아지고 가운데로 몰린다.

(ii) $\sigma=1$이고 m이 변할 때



평균 m이 중심이므로 m이 변하면 곡선의 모양은 변하지 않고 대칭축의 위치만 바뀐다. 즉, 곡선만 좌우로 평행이동 한다.

참고 | 관찰오차의 이론-가우스 곡선

1800년대는 천문학, 측량학 등이 발달한 시기였다. 그 당시 유럽의 여러 나라에서는 각 국가의 넓이, 도시 사이의 거리 등 대규모 측량이 실시되었다. 여기서 동일 대상을 반복하여 측정할 때마다 결과가 다소 다르다는 것을 알게 되었는데, 이와 같은 경험에 의해서 '관찰오차의 이론'이 탄생되었다. 독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777~1855)는 관찰오차 이론의 선구자 중의 한 사람이다. 그는 관찰오차를 제거하는 계산 방법과 계측 대상의 실제값을 추계(일부를 가지고 전체를 미루어 계산함)하는 방법을 전개하였다. 이것은 대량 관찰에 있어서 계통적 인자와 우연적 인자를 명확하게 분리하는 최초의 시도였다.

가우스는 오차의 이론에서 출발하여, 정규곡선이 지니고 있는 실용적 가치를 밝혔다. 즉, 정규곡선의 측정값의 분포라든가 과학적 관찰에 수반되는 오차에 대하여 어떻게 잘 적합하는지를 보이고, 그 평균값, 확률오차 등의 기본적인 계산 방법을 고찰하였다. 그러므로 정규분포곡선을 가우스 곡선이라고 부르기도 한다.

02 표준정규분포

알 아 보 기 / 표준정규분포의 뜻을 알아보자.

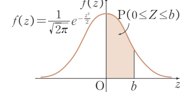
평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 기호로

$$\mathrm{N}(0,\ 1)$$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포를 따르면 Z의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (\text{단, } -\infty<z<\infty)$$



이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으며, 그 값은 부록의 표준정규분포표에 주어져 있다.

표준정규분포표는 임의의 b에 대하여 $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$의 값을 나타낸다.

z	0	1	5	6	7
0.0	.0000	.0040	.0199	.0239	.0279
0.1	.0398	.0438	.0596	.0636	.0675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4744	.4750	.4756
2.0	.4772	.4778	.4798	.4803	.4808

이를테면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

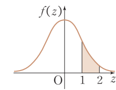
| **보기** | 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때

(1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

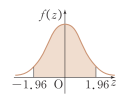


(2) $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)$

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=2\times 0.4750=0.95$



스 스 로 하 기 / 익힘책 143쪽 | 익힘책 144쪽 | 익힘책 146쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 2)$ (2) $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

(3) $\mathrm{P}(Z\le -1)$ (4) $\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

$\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

알아보기 / 해설

표준정규분포는 평균이 0이므로 그 분포곡선 $y=f(z)$의 그래프는 직선 $z=0$에 대하여 대칭이다. 이 성질을 이용하면 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

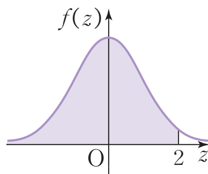
즉, 다음 성질을 이용한다.

(1) $\mathrm{P}(Z\le 0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$

(2) $\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$

스스로 하기 / 풀이

1 (1)

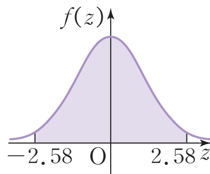


$\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}$

(2)



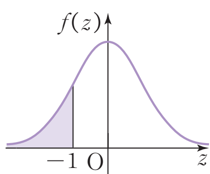
$\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)$

$=\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)$

$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)$

$=2\times 0.4951=\mathbf{0.9902}$

(3)



$\mathrm{P}(Z\le -1)$

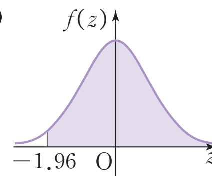
$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

$=\mathbf{0.1587}$

(4)



$\mathrm{P}(Z\ge -1.96)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.96)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$

$=0.5+0.4750$

$=\mathbf{0.9750}$

03 표준화

알 아 보 기 / 표준화의 뜻을 알아보고, 이를 활용하여 보자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은 각각 $\mathrm{E}(Z)=0$, $\mathrm{V}(Z)=1$이다. 즉, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}=0$
$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$
$=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=1$

이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 확률변수 X의 **표준화**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

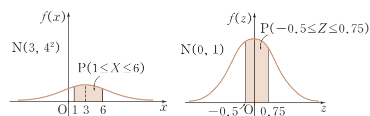
$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에 대한 분포표가 주어져 있지 않으므로 표준화하여 확률을 구한다.

| 보기 | 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 4^2)$을 따를 때, $Z=\frac{X-3}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$1\le X\le 6 \Longleftrightarrow \frac{1-3}{4}\le\frac{X-3}{4}\le\frac{6-3}{4}$$
$$\Longleftrightarrow -0.5\le Z\le 0.75$$



$$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 6)=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.75)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)$$
$$=0.1915+0.2734$$
$$=0.4649$$

알아보기 / 해설

- 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$
$$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$$

그러므로 $\mathrm{E}(X)=m$, $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$일 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}X-\frac{m}{\sigma}$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{m}{\sigma}$$
$$=\frac{1}{\sigma}m-\frac{m}{\sigma}=0$$
$$\mathrm{V}(Z)=\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$$

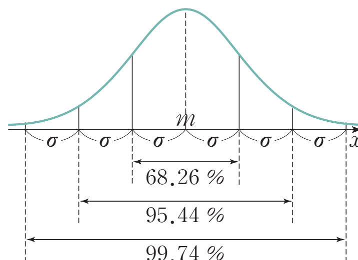
- 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하는 이유는 다음과 같다.
  정규분포를 따르는 확률변수 X는 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이를 이용하여 구한다. 그러나 m과 σ의 값에 따라 곡선의 모양이 달라지기 때문에 확률을 구하기 위해 그 넓이를 일일이 계산해야 하는 번거로움이 있다.
  따라서 확률을 보다 쉽게 구하기 위해 하나의 기준을 정할 필요가 있었고 그것이 정규분포의 표준화인 것이다.
  또한 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하면 여러 가지 확률변수를 비교할 때에도 편리하다.

보충 학습

정규분포곡선의 성질

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 알 수 있다.

(i) $\mathrm{P}(|X-m|<\sigma)=0.6826$
(ii) $\mathrm{P}(|X-m|<2\sigma)=0.9544$
(iii) $\mathrm{P}(|X-m|<3\sigma)=0.9974$



즉, 자료 전체의 약 68.26 %는 평균으로부터 $\pm\sigma$ 이내에 분포되어 있고, 약 95.44 %는 평균으로부터 $\pm 2\sigma$ 이내에 분포되어 있으며, 약 99.74 %는 평균으로부터 $\pm 3\sigma$ 이내에 분포되어 있다.

스스로 하기 / 풀이

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(X\ge 50)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}\ge\dfrac{50-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathbf{0.5}$

(2) $\mathrm{P}(60\le X\le 75)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{60-50}{10}\le\dfrac{X-50}{10}\le\dfrac{75-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4938-0.3413$

$=\mathbf{0.1525}$

(3) $\mathrm{P}(45\le X\le 65)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{45-50}{10}\le\dfrac{X-50}{10}\le\dfrac{65-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332$

$=\mathbf{0.6247}$

(4) $\mathrm{P}(X<55)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{10}<\dfrac{55-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z<0.5)$

$=0.5+0.1915$

$=\mathbf{0.6915}$

186

함 께 하 기 / 익힘책 143쪽 | 익힘책 144쪽 | 익힘책 146쪽



1 어떤 종류의 음료수 캔 300개 각각에 들어 있는 내용물의 용량은 평균이 190 mL, 표준편차가 5 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 용량이 193 mL 이상인 캔은 약 몇 개인가?

풀이

캔에 들어 있는 내용물의 용량을 확률변수 X (mL)라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따른다. 여기서 $Z=\dfrac{X-190}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(187\le X\le 192)=\mathrm{P}(-0.6\le Z\le 0.4)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)$

$=0.2257+0.1554$

$=0.3811$

따라서 용량이 187 mL 이상 192 mL 이하인 캔은 전체의 **약 38 %**이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 193)=\mathrm{P}(Z\ge 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.5-0.2257$

$=0.2743$

이때, $300\times 0.2743=82.29$이므로 용량이 193 mL 이상인 캔의 개수는 **약 82개**이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 143쪽 | 익힘책 144쪽 | 익힘책 146쪽

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따를 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\ge 50)$ (2) $\mathrm{P}(60\le X\le 75)$

(3) $\mathrm{P}(45\le X\le 65)$ (4) $\mathrm{P}(X<55)$

2 어느 학교 학생 150명의 수학 성적은 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 약 몇 %인가?

(2) 성적이 80점 이상인 학생은 약 몇 명인가?

2 각 학생의 수학 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{X-60}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(52\le X\le 70)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{52-60}{10}\le Z\le\dfrac{70-60}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.2881+0.3413$

$=0.6294$

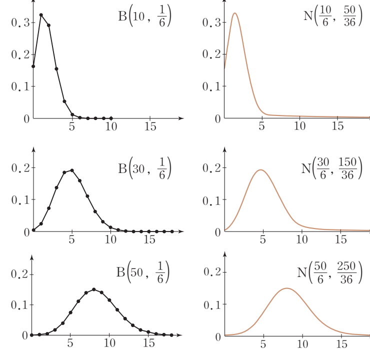
따라서 성적이 52점 이상 70점 이하인 학생은 전체의 **약 63 %**이다.

04 이항분포와 정규분포의 관계

알아보기 / 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 알아보자.

한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다. 이때, X의 평균 $np=\frac{n}{6}$이고 분산 $npq=\frac{5n}{36}$이다.

여기서 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{6},\ \frac{5n}{36}\right)$에 가까워짐을 짐작할 수 있다.



일반적으로 이항분포의 그래프는 시행 횟수 n이 커질 때 정규분포곡선에 가까워진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

n이 $np\geq5$ 또는 $nq\geq5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

(2) $\mathrm{P}(X\geq80)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{80-60}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

이때, $150\times0.0228=3.42$이므로 성적이 80점 이상인 학생은 **약 3명**이다.

알아보기 / 해설

- 이항분포와 정규분포의 관계에 의하여 n이 충분히 클 때, 이항분포에 대한 계산을 표준정규분포로 근사하여 구할 수 있다.

- 이항분포에서 시행 횟수 n이 커질 때 그 그래프는 정규분포곡선에 가까워진다. 이때, n이 충분히 크다는 것을 다음과 같이 판정한다.
  (1) $p\leq0.5$일 때, $np\geq5$인 n이면 충분히 큰 것으로 생각한다.
  (2) $p>0.5$일 때, $nq\geq5$인 n이면 충분히 큰 것으로 생각한다. (단, $q=1-p$)

참고 | 엑셀 프로그램을 이용하여 이항분포 그리기

엑셀 프로그램을 이용하여 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{6}\right)$의 그래프를 그려 보자.

1단계

A1 셀에 'x', B1 셀에 'P(X=x)'를 입력하고 A2 셀부터 A12 셀까지 각각 0부터 10까지 입력한다.

2단계

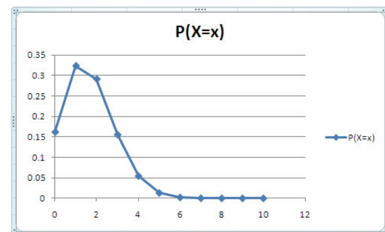
B2 셀에 '=BINOMDIST(A2,10,1/6,FALSE)'를 입력하여 $\mathrm{P}(X=0)$의 값을 구한다.

3단계

B2 셀의 오른쪽 하단에 마우스 포인터가 '+' 표시가 되도록 이동하여 마우스 좌측 버튼을 클릭한 후 B12 셀까지 마우스 끌기를 한다.

4단계

삽입 메뉴의 차트 영역에서 '분산형 아이콘' → '직선 및 표식이 있는 분산형 아이콘'을 선택한다.



알아보기 / 해설

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$$

이때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

확률변수 X를 표준화하기 위하여 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

188

이항분포에서 시행 횟수 n이 아주 큰 수이면 어떤 사건이 일어날 확률을 구하는 것이 쉽지 않다.

이를테면 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률, 즉 $\sum_{x=94}^{135} {}_{720}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{720-x}$을 구하는 것은 매우 어려운 일이다.

이와 같은 경우 정규분포를 이용하여 그 근삿값을 구할 수 있다.

또한 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$라고 하면 충분히 큰 n에 대하여 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$이다.

함 께 하 기 /

익힘책 143쪽 | 익힘책 144쪽 | 익힘책 146쪽

1 한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률을 구하여라.

풀이

한 개의 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120,\ \sigma(X)=\sqrt{720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=10$$

여기서 $n=720$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(94\le X\le 135)&=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4953+0.4332\\&=\mathbf{0.9285}\end{aligned}$$

$n=720,\ p=\frac{1}{6}$에서 $np=120>5$이므로 이 n은 충분히 크다고 볼 수 있다.

$\mathrm{P}(94\le X\le 135)=\mathrm{P}\left(\frac{94-120}{10}\le Z\le\frac{135-120}{10}\right)=\mathrm{P}(-2.6\le Z\le 1.5)$

스 스 로 하 기 /

익힘책 143쪽 | 익힘책 144쪽 | 익힘책 146쪽

1 발아율이 80 %인 씨앗을 100개 뿌렸을 때, 다음을 구하여라.

(1) 발아한 씨앗이 80개 이상 92개 이하일 확률

(2) 발아한 씨앗이 90개 이상일 확률

스스로 하기 / 풀이

1 발아한 씨앗의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times 0.8=80$

$\mathrm{V}(X)=100\times 0.8\times 0.2=16$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

여기서 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-80}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(80\le X\le 92)=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=\mathbf{0.4987}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 90)=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5-0.4938=\mathbf{0.0062}$

공학 도구 / 해설

- 교과서 176쪽의 함께하기 1을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하여 보자.

$$\mathrm{P}(X\ge 81)=1-\mathrm{P}(X\le 80)$$

한편 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(82,\ 0.95)$를 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 80)$을 구하기 위하여 다음과 같이

189

공 학 도 구

*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 프로그램을 이용한 확률 계산

1. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X=90)$을 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 Number_s에 90, Trials에 100, Probability_s에 0.8을 입력하고, Cumulative에 FALSE를 입력한 후 확인을 클릭한다.

$\therefore \mathrm{P}(X=90)=0.00336282$

| 참고 | Cumulative에 TRUE를 입력하면 확률 $\mathrm{P}(X\le 90)$을 구할 수 있다.

2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 50^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X\le 270)$을 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭한다.

2단계 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'NORMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭한다.

3단계 오른쪽 화면과 같이 대화 상자에서 X에 270, Mean에 180, Standard_dev에 50을 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한 후 확인을 클릭한다.

$\therefore \mathrm{P}(X\le 270)=0.964069681$

| 참고 | 수식 입력창에 다음과 같이 입력하면 확률 $\mathrm{P}(180\le X\le 230)$을 구할 수 있다.

=NORMDIST(230,180,50,TRUE)-NORMDIST(180,180,50,TRUE)

$\therefore \mathrm{P}(180\le X\le 230)=0.341344746$

엑셀 프로그램의 'BINOMDIST' 대화 상자에서 Number_s에 80, Trials에 82, Probability_s에 0.95를 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한다.

함수 인수 — BINOMDIST

Number_s	80	= 80
Trials	82	= 82
Probability_s	0.95	= 0.95
Cumulative	TRUE	= TRUE

= 0.920767491
개별항 이항 분포 확률을 구합니다.
Cumulative 은(는) 함수의 형태를 결정하는 논리값입니다. 누적 분포 함수에는 TRUE를, 확률 함수에는 FALSE를 사용합니다.
수식 결과= 0.920767491
도움말(H) 확인 취소

$\therefore \mathrm{P}(X\le 80)=0.920767491$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 81)=1-\mathrm{P}(X\le 80)$

$=1-0.920767491$

$=0.079232509$

• 교과서 186쪽의 함께하기 1의 물음 (1)을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하여 보자.

$\mathrm{P}(187\le X\le 192)$

$=\mathrm{P}(X\le 192)-\mathrm{P}(X\le 187)$

한편 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 192)$를 구하기 위하여 다음과 같이 'NORMDIST' 대화 상자에서 X에 192, Mean에 190, Standard_dev에 5를 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한다.

함수 인수 — NORMDIST

X	192	= 192
Mean	190	= 190
Standard_dev	5	= 5
Cumulative	TRUE	= TRUE

= 0.655421742
지정한 평균과 표준 편차에 의거 정규 누적 분포값을 구합니다.
Cumulative 은(는) 함수의 형태를 결정하는 논리값입니다. TRUE이면 누적 분포 함수, FALSE이면 확률 밀도 함수를 구합니다.
수식 결과= 0.655421742
도움말(H) 확인 취소

$\therefore \mathrm{P}(X\le 192)=0.655421742$

또 $\mathrm{P}(X\le 187)$을 구하기 위하여 다음과 같이 'NORMDIST' 대화 상자에서 X에 187, Mean에 190, Standard_dev에 5를 입력하고, Cumulative에 TRUE를 입력한다.

함수 인수 — NORMDIST

X	187	= 187
Mean	190	= 190
Standard_dev	5	= 5
Cumulative	TRUE	= TRUE

= 0.274253118
지정한 평균과 표준 편차에 의거 정규 누적 분포값을 구합니다.
Cumulative 은(는) 함수의 형태를 결정하는 논리값입니다. TRUE이면 누적 분포 함수, FALSE이면 확률 밀도 함수를 구합니다.
수식 결과= 0.274253118
도움말(H) 확인 취소

$\therefore \mathrm{P}(X\le 187)=0.274253118$

$\therefore \mathrm{P}(187\le X\le 192)$

$=\mathrm{P}(X\le 192)-\mathrm{P}(X\le 187)$

$=0.381168624$

• 문제의 조건을 이용하여 구한 값과 엑셀 프로그램을 이용하여 구한 값은 반올림한 자리가 다르므로 오차가 생길 수 있다.

중단원 확인하기 / 풀이

1 주사위의 눈의 수와 받는 금액을 표로 나타내면 다음과 같다.

눈	1	2	3	4	5	6
금액(원)	100	200	300	400	500	600

받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 금액이 확률변수 X이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-250	-150	-50	50
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
X	150	250	합계	
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	

$\mathrm{E}(X)$

$=(-250)\times\frac{1}{6}+(-150)\times\frac{1}{6}$

$\quad+(-50)\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}$

$\quad+150\times\frac{1}{6}+250\times\frac{1}{6}$

$=0$

$\mathrm{E}(X^2)$

$=(-250)^2\times\frac{1}{6}+(-150)^2\times\frac{1}{6}$

$\quad+(-50)^2\times\frac{1}{6}+50^2\times\frac{1}{6}+150^2\times\frac{1}{6}$

$\quad+250^2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{87500}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\frac{87500}{3}-0=\frac{87500}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{87500}{3}}=\frac{50\sqrt{105}}{3}$

따라서 X의 평균은 **0**, 표준편차는 $\mathbf{\frac{50\sqrt{105}}{3}}$이다.

190

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호: 확률변수, 이산확률변수, 확률질량함수, 확률분포, 연속확률변수, 확률밀도함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준화, 표준정규분포, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n,\ p)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0,\ 1)$

V_1. 확률분포

이산확률변수의 평균과 표준편차

이해

1 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나오면 100원, 2의 눈이 나오면 200원, …, 6의 눈이 나오면 600원을 받는 게임에서 350원을 지불하고 주사위를 한 번 던질 때, 받는 금액에서 지불한 금액을 뺀 금액을 확률변수 X(원)라고 하자. X의 평균과 표준편차를 구하여라.

확률밀도함수

계산

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$f(x)=ax\ (\text{단, } 0\le x\le 2)$$

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구하여라.

(3) $\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)$의 값을 구하여라.

이항분포

의사소통

3 어느 핸드볼 선수의 슛 성공률이 60 %라고 한다. 이 선수가 한 시합에서 10번의 슛을 시도할 때, 성공하는 횟수의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

정규분포의 활용

문제 해결

4 어떤 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게는 평균이 168.5 g, 표준편차가 5.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 포도 중 50송이를 조사할 때, 그 무게가 174 g 이상인 송이 수를 추측하여라. (단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)



이항분포와 정규분포의 관계

문제 해결

5 어떤 고등학교에서 근시인 학생의 비율이 전체의 40 %라고 한다. 이 학교의 학생 중 150명을 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 근시인 학생이 72명 이상일 확률

(2) 근시인 학생이 54명 이상 72명 이하일 확률

2 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

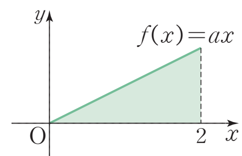
$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 ax\,dx=1$

$\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=1,\ 2a=1$

$\therefore a=\mathbf{\frac{1}{2}}$

| 다른 풀이 |

$f(x)$는 확률밀도함수이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 1이다.



$\frac{1}{2}\times2\times2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x$이므로

$$E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

$$V(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=\int_0^2\frac{1}{2}x^3\,dx-\frac{16}{9}$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2-\frac{16}{9}$$
$$=2-\frac{16}{9}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(3) $$P(0.5\le X\le 1.5)=\int_{0.5}^{1.5}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{0.5}^{1.5}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

3 이 핸드볼 선수의 슛 성공 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(10,\ 0.6)$을 따르므로

$E(X)=10\times 0.6$
$=\mathbf{6}$

$V(X)=10\times 0.6\times 0.4$
$=\mathbf{2.4}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$
$=\mathbf{\sqrt{2.4}}$

4 이 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(168.5,\ 5.5^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-168.5}{5.5}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상일 확률은

$$P(X\ge 174)=P\left(Z\ge\frac{174-168.5}{5.5}\right)$$
$$=P(Z\ge 1)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

이때, $50\times 0.1587=7.935$이므로 포도 50송이 중 무게가 174 g 이상인 것은 **약 8송이**이다.

5 근시인 학생의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=150\times\frac{2}{5}=60$

$\sigma(X)=\sqrt{150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=6$

이때, $n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(60,\ 6^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{X-60}{6}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $$P(X\ge 72)=P\left(Z\ge\frac{72-60}{6}\right)$$
$$=P(Z\ge 2)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=\mathbf{0.0228}$$

(2) $P(54\le X\le 72)$
$$=P\left(\frac{54-60}{6}\le Z\le\frac{72-60}{6}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 2)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=\mathbf{0.8185}$$

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.311

01 바탕

검은 공 3개, 흰 공 3개가 들어 있는 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

02 바탕

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax^3\ (0\le x\le 1)$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 기본

확률분포가 오른쪽 표와 같은 확률변수 X의 평균이 -1일 때, X의 분산은?

X	$-a$	0	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	b	1

① -11 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 11

04 기본

확률변수 X에 대하여 $E(X)=\sqrt{15}$, $E(X^2)=96$일 때, X의 표준편차 $\sigma(X)$의 값은?

① 4 ② 9 ③ 10 ④ 15 ⑤ 18

05 기본

연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\ (0\leq x\leq 4)$$

일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

06 기본

500원짜리 동전 2개를 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전을 상금으로 갖는다고 한다. 상금의 액수를 확률변수 X라고 할 때, 확률변수 $2X+300$의 평균은?

① 300 ② 800 ③ 1300 ④ 1800 ⑤ 2300

07 바탕

타율이 2할인 야구 선수가 4번의 타석에서 세 번 이상 안타를 칠 확률은?

① 0.0272 ② 0.2723 ③ 0.4435 ④ 0.7319 ⑤ 0.9164

08 기본

5 %의 불량률로 제품을 생산하는 기계에서 임의로 100개의 제품을 생산할 때, 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 노란 공이 나올 확률이 $\frac{x}{x+4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

09 실력

노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 공을 1개 꺼내어 보고 다시 넣는 시행을 n번 반복할 때, 노란 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균은 12이고, 분산은 3일 때, $x+n$의 값을 구하여라.

10 기본

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 20^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X \le 80)$을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1)=0.6826$)

11 실력

오른쪽 표는 국어, 영어, 수학 성적에 대한 어떤 학급 전체 학생의 평균과 표준편차를 나타낸 표이다. 세린이의 국어, 영어, 수학 성적이 각각 85, 82, 92일 때, 학급 성적과 비교하여 3과목 중 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하여라.

(단, 이 학급의 성적은 정규분포를 따른다.)

과목	국어	영어	수학
평균	70	74	76
표준편차	15	16	18

합격자의 최저 점수를 k라고 하면 $\mathrm{P}(X \ge k)=\frac{350}{5000}$임을 이용한다.

12 실력

350명의 신입 사원을 선발하는 어느 회사의 입사 시험에 5000명이 응시하였다. 응시자의 성적은 평균이 700점, 표준편차가 40점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

2 통계적 추정

이 단원을 배우면

- 모집단과 표본의 뜻을 알 수 있다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해할 수 있다.
- 모평균을 추정할 수 있다.

1 표본조사와 표본평균의 분포

2 모평균의 추정

소단원의 학습 목표

1. 모집단과 표본의 뜻을 안다.
2. 전수조사와 표본조사의 뜻을 안다.
3. 임의추출의 뜻을 알고, 그 방법을 이해한다.
4. 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 안다.
5. 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 안다.
6. 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 이해한다.
7. 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

여기서 배우는 용어 및 기호

모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, $\overline{X}$

192

2 통계적 추정

1 표본조사와 표본평균의 분포



학습 목표

- 모집단, 표본의 뜻과 임의추출의 뜻을 안다.
- 모평균, 모분산, 모표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 뜻을 안다.
- 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

다 가 서 기 / **콩의 개수 세기**

이 이야기의 주인공은 백사 이항복(1556~1618)선생이다. 백사는 임진왜란 당시 임금을 보좌하고 백성을 잘 보살펴 국난 극복에 큰 공을 세웠다.



한 섬=열 말
한 말=열 되
한 되=열 홉

한 섬 가득 들어 있는 콩의 개수를 일일이 세기는 어렵다. 그러나 한 홉의 콩의 개수를 세는 데는 5분도 걸리지 않는다.

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는 $500\times10\times10\times10=500000$(개)임을 유추할 수 있다.

이와 같이 전체를 다 조사하지 않고 일부분만 조사하여 전체를 예측하는 것을 통계적 사고방식이라고 할 수 있다.

다가서기 / 해설

섬, 말, 되, 홉은 우리나라에서 전통적으로 써온 부피의 단위로 한 되는 열 홉, 한 말은 열 되, 한 섬은 열 말이다. 즉,

$$1(\text{되})=10(\text{홉})$$
$$1(\text{말})=10(\text{되})=10\times10(\text{홉})$$
$$1(\text{섬})=10(\text{말})=10\times10(\text{되})=10\times10\times10(\text{홉})$$

한 홉에 들어 있는 콩의 개수가 500개이면 한 섬에 들어 있는 콩의 개수는

$500\times10\times10\times10=500000$(개)임을 유추할 수 있다.

이때, 콩 1개를 세는 데 0.5초가 걸리고, 어떤 수에 10을 곱하는 데 3초가 걸린다고 하면

한 섬에 들어 있는 콩의 개수를 세는 데 걸리는 시간은

$500000\times0.5=250000$(초)

한 홉에 들어 있는 콩의 개수를 센 후 그 수에 10을 세 번 곱하는 데 걸리는 시간은

$500\times0.5+3+3+3=259$(초)

따라서 한 홉에 들어 있는 콩의 개수를 센 후 그 수에 10을 세 번 곱하는 데 걸리는 시간이 빠르다는 것을 알 수 있다.

이와 같이 전체를 일일이 조사하는 것보다는 일부분을 조사하여 예측하는 것이 더 쉽고 빠르다.

193

01 표본조사

탐 구 하 기 / 합리적인 설문 조사 방법

개교기념일 행사에 대한 전교생의 의견을 알아보기 위하여 100명을 뽑아 설문 조사를 하려고 한다. 다음 중 어느 것이 더 합리적인 방법인지 택하고, 그 이유를 말하여 보자.

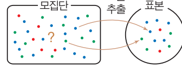
1. 특정 학년에서만 뽑는다.
2. 각 학년에서 골고루 뽑는다.

알 아 보 기 / 모집단과 표본의 뜻을 알아보자.

어떤 지역의 가구당 교육비를 알고 싶을 때, 이 지역의 모든 가구를 방문하여 교육비를 조사하면 그 상태를 알 수 있다. 이와 같이 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다. 전수조사의 대표적인 예로는 인구 조사가 있다.

통계조사
- 전수조사(全數調査)
- 표본조사(標本調査)

반면에 어떤 지역에서 100가구를 택하여 교육비를 알아보고, 그 결과에서 전체 가구의 교육비를 추측할 수도 있다. 이와 같이 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 **표본**이라 하고, 표본을 조사하는 것을 **표본조사**라고 한다.



우리나라에서는 인구 조사를 매 5년마다 실시한다.

또 추출된 표본의 개수를 표본의 크기라고 한다.

전구의 수명을 조사할 때, 전수조사를 하면 검사가 끝난 전구는 못 쓰게 되므로 표본조사를 한다.

일반적으로 전수조사는 표본조사에 비하여 시간과 비용이 많이 들고, 전수조사가 불가능한 경우도 있으므로 특별한 경우를 제외하고는 전수조사보다 표본조사를 많이 한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽

1 전수조사와 비교하여 표본조사의 장점을 말하여라.

탐구하기 / 풀이

각 학년에서 골고루 뽑는 것이 특정 학년에서만 뽑는 것보다 합리적이다. 그 이유는 골고루 뽑는 것이 전체 의견을 더 잘 수렴할 수 있기 때문이다.

따라서 2의 방법이 1의 방법보다 더 합리적이다.

알아보기 / 해설

- 통계에서 중요한 용어가 2개 있는데 모집단과 표본이 바로 그것이다. 모집단(母集團, population)은 관심 또는 연구하고자 하는 대상 전체를 말하고, 표본(標本, sample)은 모집단을 알아보기 위하여 모집단에서 추출한 일부분을 말한다.

예를 들어 한국의 고등학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶을 때, 모집단은 한국의 고등학교 2학년 학생 전체이다. 그런데 이들을 모두 모아서 실력을 테스트하려면 시간과 경비가 매우 많이 든다. 따라서 몇 개의 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 실력을 테스트한다. 이때, 뽑힌 고등학교 2학년 학생들이 표본이 된다.

한편 우리 학교 2학년 학생들의 통계 실력을 알아보고 싶다면 모집단은 우리 학교 2학년 학생 전체이다. 이때는 모집단 전체를 조사하는 전수조사를 하여도 되고, 2학년 각 반에서 몇 명씩 택하여 조사하는 표본조사를 하여도 된다.

- 조사를 하고 나면 그 물건을 다시 쓰지 못하는 경우가 있다.

예를 들어 전구의 수명 시간을 조사한다던지, 불꽃놀이 용품에서 불량품을 골라내는 것 등은 모든 제품을 조사하고 나면 실제로 판매할 상품은 없어지게 된다. 이와 같은 조사를 파괴검사라고 하는데 이 경우에는 표본조사를 하여야 한다.

스스로 하기 / 풀이

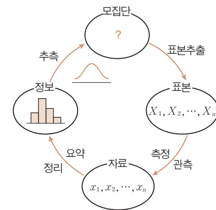
1 ① 시간이 절약된다.
② 경비가 절감된다.
③ 한 번 검사하면 파괴되어서 그 물건을 못 쓰게 되는 검사, 이를테면 전구의 수명 시간에 대한 조사와 같은 경우에도 가능하다.

194

알 아 보 기 / 임의추출의 뜻을 알아보자.

표본조사의 목적은 표본에서 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 성질을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특징이 잘 반영되도록 표본을 택하는 것이 중요하다.

이를 위해서는 추출되는 표본이 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않아야 한다. 즉, 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되어야 한다.



앞으로 특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

이와 같은 추출법을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

표본을 추출하는 데에는 한 번 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 복원추출과 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 비복원추출이 있다.

모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

난수주사위
0에서 9까지의 숫자를 각각 두 번 사용하여 정이십면체의 각 면에 숫자 하나씩을 새긴 주사위이다.

모집단에서 표본을 임의추출하는 방법으로는 제비뽑기, 난수주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다.

그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 소프트웨어를 많이 사용한다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽

2 숫자 1, 2, 3이 각각 적힌 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 공 2개를 복원추출하는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

3 위의 스스로 하기 **2**에서 다음과 같이 추출하는 경우의 수를 구하여라.
(1) 비복원으로 2개를 추출한다.
(2) 동시에 2개를 추출한다.

알아보기 / 해설

- 통계 조사의 목적은 모집단의 성질을 알고 정확한 상황을 파악하기 위한 것이다. 알고자 하는 성질에 따라서 전수조사를 할 수도 있고 표본조사를 할 수도 있다. 모집단 전체를 알고자 전수조사를 한다고 해서 반드시 정확한 것은 아니다. 이를테면 조사 자체에서 오류가 일어날 수도 있다.
  표본조사의 경우에는 다음 사항이 특히 중요하다.
  (1) 표본에 모집단의 성질이 잘 반영되어야 한다.
  (2) 표본을 뽑는 방법이 적절하여야 한다.
- 임의추출은 조사자의 주관에 따르지 않고, 각 원소가 택하여 질 확률이 서로 같게 추출하는 것으로 무작위추출이라고도 한다.
  임의추출에 대비되는 개념이 유의추출인데, 이것은 조사자가 자기의 경험에 의해서 가장 대표적이라고 생각되는 원소를 골라서 뽑는 방식이다.

스스로 하기 / 풀이

2 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 것이 복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3\times3=\mathbf{9}$(가지)

3 (1) 추출된 원소를 다시 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 것이 비복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$3\times2=\mathbf{6}$(가지)
(2) ${}_3C_2=\mathbf{3}$(가지)

참고 | 난수표

난수표를 최초로 만든 사람은 팁페트(1927)인데, 그 후 여러 종류가 나왔다. KS 난수표는 우리나라 최초로 1963년 박한식 교수가 만든 것이다. KS 난수표의 숫자의 개수는 40000개 정도이고, 이 난수표를 만들 당시 우리나라에 전자계산기가 없었기 때문에 수공업적으로 만들었다.

수 학 실험실

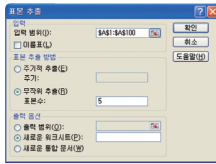
컴퓨터 프로그램과 계산기를 이용한 임의추출

1. 컴퓨터 프로그램을 이용한 임의추출

컴퓨터 프로그램을 이용하여 크기 100인 모집단에서 5개의 표본을 임의추출하여 보자.

❶ A1~A100 셀에 1, 2, 3, …, 100을 입력한다.

❷ 데이터 도구 상자에서 데이터 분석을 클릭하고, 표본추출을 선택하면 오른쪽 그림과 같은 화면이 나타난다.



❸ 입력 범위는 A1~A100 셀을 지정한다.(입력 범위란을 클릭한 후, A1 셀을 클릭하고 A100 셀까지 마우스 끌기를 하면 자동으로 지정된다.) 표본추출 방법을 무작위 추출로 선택한 뒤 표본 수에 5를 입력한다.

❹ 출력 옵션을 새로운 워크 시트로 선택하고 확인을 클릭하면 새로운 워크 시트에 임의추출된 5개의 숫자가 나타난다.

2. 계산기를 이용한 임의추출

공학용 계산기에는 난수를 만드는 기능 키가 있다. 이들은 대부분 RANDOM 또는 RAND로 표시되어 있는데, 이것을 누르면 0과 1 사이의 난수를 얻을 수 있다. 이들 수에 1000을 곱하면 000에서 999까지의 난수가 생긴다.

이를테면 1000명 중에서 5명을 임의추출하는 순서는 다음과 같다.



❶ 각 사람에게 000에서 999까지의 번호를 붙인다.

❷ 2ndF RANDOM 7 = 를 누르고, = 를 눌러 난수를 얻는다. 이때, = 를 누를 때마다 새로운 난수를 얻을 수 있다.

❸ ❷에서 얻은 난수에 1000을 곱한 수를 번호로 하는 5명을 표본으로 택한다.

논술/수행평가 과제

1. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

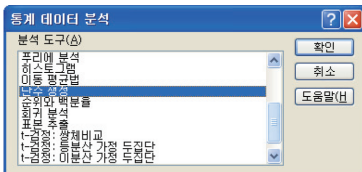
2. 계산기를 이용하여 우리 반 학생 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

논술/수행평가 과제 / 해설

우리 반 학생이 34명이라고 하면

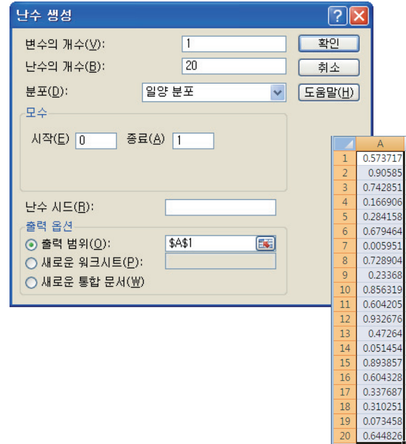
1. ❶ 34명의 각 사람에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다.

❷ 엑셀 프로그램의 데이터 메뉴에서 '데이터 분석'을 선택하면 다음과 같은 화면이 나타난다.



여기서 '난수 생성'을 선택하고, 확인을 클릭한다.

❸ 난수 생성 대화 상자에서 변수의 개수에 1, 난수의 개수에 20을 입력하고, 분포는 일양분포를 선택한다.



❹ 난수를 만든 다음 100을 곱하여 소수점 아래를 버린 수 중 33보다 큰 수는 지우고, 남은 수 중에서 앞에서부터 다섯째 수까지 택한다.

~~57~~, ~~90~~, ~~74~~, 16, 28, ~~67~~, 00, ~~72~~, 23, ~~85~~, ~~60~~, ~~93~~, ~~47~~, 05, ~~89~~, ~~60~~, 33, 31, 07, ~~64~~

❺ ❹의 결과 택해진 수 16, 28, 00, 23, 05를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

2. ❶ 우리 반 학생들에게 00에서 33까지의 번호를 붙인다. 이때, 기존의 학생 번호 1, 2, …, 32, 33, 34를 각각 01, 02, …, 32, 33, 00으로 한다.

❷ 계산기를 이용하여 얻은 난수에 1000을 곱하여 세 자리 수를 만들고 이 중에서 십의 자리와 일의 자리만 택한다.

❸ 예를 들어 ❷의 결과가 80, 22, 62, 19, 70, 14, 31, 76, 02, …로 나왔다면 앞에서부터 차례로 33 이하인 5개의 수 22, 19, 14, 31, 02를 번호로 하는 학생을 표본으로 택한다.

02 표본평균의 뜻

알 아 보 기 / 표본평균의 뜻을 알아보자.

모집단에서 조사의 대상이 되는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다.

표본은 확률변수이므로 대문자 X_1, X_2, $\cdots$, X_n으로 나타낸다.

$$\text{표본평균: } \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\text{표본분산: } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \text{표본표준편차: } S=\sqrt{S^2}$$

표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

| **보기** | 1, 2, 3, $\cdots$, 9, 10으로 구성된 모집단을 생각하고 1개의 숫자를 임의추출할 때, 나오는 숫자를 확률변수 X라고 하면

(1) 모평균: $m=5.5$, 모분산: $\sigma^2=8.25$, 모표준편차: $\sigma=\sqrt{8.25}$

$m=\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+10)$
$=5.5$
$\sigma^2=\frac{1}{10}\{(1-5.5)^2+(2-5.5)^2+\cdots+(10-5.5)^2\}$
$=8.25$

(2) 표본으로 2, 6, 7이 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(2+6+7)=5$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(2-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2\}=7$

S의 값: $\sqrt{7}$

(3) 표본으로 3, 4, 5가 택해졌다면

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{3}(3+4+5)=4$

S^2의 값: $\frac{1}{3-1}\{(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2\}=1$

S의 값: 1

(2), (3)과 같이 $\overline{X}$, S^2, S는 표본에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

스 스 로 하 기 / 익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽

1 크기가 5인 표본 1, 3, 5, 7, 9에 대하여 표본평균, 표본분산 및 표본표준편차의 값을 각각 구하여라.

알아보기 / 해설

- 다음 그림과 같이 주머니에 1, 2, $\cdots$, 9, 10까지 쓰여진 숫자 카드가 들어있다고 가정하고, 이들을 모집단이라고 하자.



여기서 모평균, 모분산, 모표준편차는 각각 다음과 같다.

$$m=5.5,\ \sigma^2=8.25,\ \sigma=\sqrt{8.25}$$

만약 이 주머니에서 카드 3장을 복원추출하여 그 숫자를 조사할 때, 그 경우의 수는

$10^3=1000$(가지)

이다.

(1) 표본으로 1, 1, 1이 택해졌다면

$$\overline{X}=1,\ S^2=0,\ S=0$$

(2) 표본으로 5, 7, 9가 택해졌다면

$$\overline{X}=7,\ S^2=4,\ S=2$$

$$\vdots$$

이와 같이 표본으로 무엇이 택해졌느냐에 따라 $\overline{X}$, S^2, S의 값은 여러 가지 값을 가지게 된다.
따라서 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 확률변수임을 이해하여야 한다.

- 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이 모집단 전체일 때, 모분산은

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\ \left(\text{단, } \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

이지만, 자료 X_1, X_2, $\cdots$, X_n이 어떤 모집단에서 추출된 표본이면, 그 표본분산은

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\left(\text{단, } \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

이다.

스스로 하기 / 풀이

1 $\overline{X}$의 값:

$$\frac{1}{5}(1+3+5+7+9)=\frac{1}{5}\times25$$
$$=\mathbf{5}$$

S^2의 값:

$$\frac{1}{5-1}\{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\times40=\mathbf{10}$$

S의 값: $\sqrt{\mathbf{10}}$

03 표본평균의 분포

알 아 보 기 / 표본평균의 분포를 살펴보고, 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공을 모집단으로 생각하고 1개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하면

$$m=5,\ \sigma^2=5,\ \sigma=\sqrt{5}$$

여기서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1, X_2라고 하자. 이때, 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1, X_2의 값에 따라 다른 값을 가지는 확률변수이다.

X_1 \ X_2	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$는 확률변수이고 $\overline{x}$는 $\overline{X}$를 측정하여 얻은 값이다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$$

이것을 m과 σ로 나타내면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 크기 $n=3$인 표본 X_1, X_2, X_3을 택하고, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}=\frac{8}{3}$인 경우의 수는
$X_1=2,\ X_2=2,\ X_3=4$
$X_1=2,\ X_2=4,\ X_3=2$
$X_1=4,\ X_2=2,\ X_3=2$
의 3가지이다.

$\overline{X}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{22}{3}$	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

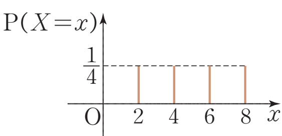
$$\mathrm{E}(\overline{X})=5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

즉, $\mathrm{E}(\overline{X})=5=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$임을 알 수 있다.

알아보기 / 해설

숫자 2, 4, 6, 8이 각각 적힌 4개의 공을 모집단으로 생각하고, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 할 때, X의 분포를 표와 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1



이 확률분포에서 평균 m과 분산 σ^2을 구하면

$$m=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=5$$

$$\sigma^2=2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}+6^2\cdot\frac{1}{4}+8^2\cdot\frac{1}{4}-5^2=5$$

여기에서 크기 $n=2$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1과 X_2라고 할 때, X_1과 X_2가 가질 수 있는 값이 각각 2, 4, 6, 8이므로 전체 경우의 수는

$4\times4=16$(가지)

여기서 $\overline{X}=k$ ($k=2,\ 3,\ \cdots,\ 8$)가 되는 경우는 다음과 같다.

$\overline{X}$	$(X_1,\ X_2)$의 쌍	경우의 수
2	(2, 2)	1
3	(4, 2), (2, 4)	2
4	(6, 2), (4, 4), (2, 6)	3
5	(8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)	4
6	(8, 4), (6, 6), (4, 8)	3
7	(8, 6), (6, 8)	2
8	(8, 8)	1
전체 경우의 수		16

따라서 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 나타낸 표를 이용하여 평균과 분산을 각각 구하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{8}+\cdots+8\cdot\frac{1}{16}=5$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{16}+3^2\cdot\frac{1}{8}+\cdots+8^2\cdot\frac{1}{16}-5^2$$

$$=\frac{5}{2}$$

표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산을 X의 평균, 분산과 비교해 보면 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 모평균과 같고, 표본평균 $\overline{X}$의 분산은 모분산을 표본의 크기로 나눈 것과 같음을 알 수 있다.

크기 $n=3$인 표본을 복원추출하여 그 공에 적힌 숫자를 X_1, X_2, X_3이라고 할 때, X_1, X_2, X_3이 가질 수 있는 값이 각각 4가지씩이므로 전체 경우의 수는 $4\times4\times4=64$(가지)

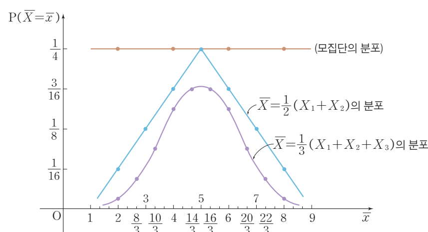
여기서 $\overline{X}=\frac{k}{3}$ ($X_1+X_2+X_3=k$, $k=6,\ 8,\ \cdots,\ 22,\ 24$)가 되는 경우는 다음과 같다.

$\overline{X}$	$(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 쌍	경우의 수
2	(2, 2, 2)	1
$\frac{8}{3}$	(2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2)	3
$\frac{10}{3}$	(2, 2, 6), (2, 6, 2), (6, 2, 2), (2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2)	6
4	2, 2, 8의 순열: 3가지 2, 4, 6의 순열: 6가지 4, 4, 4의 순열: 1가지	10
$\frac{14}{3}$	2, 4, 8의 순열: 6가지 2, 6, 6의 순열: 3가지 4, 4, 6의 순열: 3가지	12
$\frac{16}{3}$	2, 6, 8의 순열: 6가지 4, 4, 8의 순열: 3가지 4, 6, 6의 순열: 3가지	12
6	2, 8, 8의 순열: 3가지 4, 6, 8의 순열: 6가지 6, 6, 6의 순열: 1가지	10
$\frac{20}{3}$	(4, 8, 8), (8, 4, 8), (8, 8, 4), (6, 6, 8), (6, 8, 6), (8, 6, 6)	6
$\frac{22}{3}$	(6, 8, 8), (8, 6, 8), (8, 8, 6)	3
8	(8, 8, 8)	1
	전체 경우의 수	64

따라서 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 나타낸 표를 이용하여 평균과 분산을 구하면 각각 다음과 같다.

$$E(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{64}+\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{64}+\cdots+8\cdot\frac{1}{64}$$
$$=5=m$$
$$V(\overline{X})=2^2\cdot\frac{1}{64}+\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{64}+\cdots+8^2\cdot\frac{1}{64}-5^2$$
$$=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$$

앞의 모집단의 분포와 크기 $n=2$ 및 $n=3$인 표본평균의 분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 다음과 같다.

모집단이 충분히 크면 비복원추출일 때에도 오른쪽의 성질은 성립한다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 임의표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m,\ V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 n의 크기에 관계없이 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

스스로 하기 /

익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽

1. 정규분포 N(5, 36)을 따르는 모집단에서 크기 $n=16$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

2. 모평균이 6, 모표준편차가 3인 모집단에서 크기 $n=100$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 말하여라.

스스로 하기 / 풀이

1. $m=5,\ \sigma=6,\ n=16$이므로
$E(\overline{X})=\mathbf{5}$
$\sigma(\overline{X})=\frac{6}{\sqrt{16}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

2. $m=6,\ \sigma=3,\ n=100$이므로
$E(\overline{X})=6$
$\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{100}}=\frac{3}{10}$
따라서 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathbf{N\left(6,\ \frac{9}{100}\right)}$이다.

199

함 께 하 기 /

익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽



1 어느 회사에서 생산하는 전구의 수명 시간 X의 분포는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 400개의 전구를 임의추출하여 수명 시간을 조사할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하일 확률

(2) 표본평균이 1980시간 이하일 확률

풀이

$m=2000$, $\sigma=200$, $n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$E(\overline{X})=m=2000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{200}{20}=10$$

인 정규분포 $N(2000,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-2000}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) 표본평균이 1990시간 이상 2010시간 이하인 경우는 $1990\le\overline{X}\le2010$일 때이므로

$$\begin{aligned}P(1990\le\overline{X}\le2010)&=P(-1\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413\\&=\mathbf{0.6826}\end{aligned}$$

(2) 표본평균이 1980시간 이하인 경우는 $\overline{X}\le1980$일 때이므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le1980)&=P(Z\le-2)=P(Z\ge2)\\&=0.5-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=\mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

스 스 로 하 기 /

익힘책 151쪽 | 익힘책 152쪽 | 익힘책 153쪽

3 어느 지역의 가구당 한 달 수입액 X의 분포는 평균이 300만 원, 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 가구 중에서 다음과 같은 크기의 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 302만 원 이상이 될 확률을 각각 구하여라.

(1) $n=25$ (2) $n=100$ (3) $n=225$

함께하기 / 해설

1 표본의 크기 $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N(2000,\ 20^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{\overline{X}-2000}{20}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(1990\le\overline{X}\le2010)&=P(-0.5\le Z\le0.5)\\&=2P(0\le Z\le0.5)\\&=2\times0.1915\\&=0.383\end{aligned}$$

따라서 표본의 크기 $n=400$인 경우보다 확률이 낮아짐을 알 수 있다. 즉, 표본의 크기가 클수록 평균을 중심으로 대칭인 구간에 대한 확률이 커진다는 것을 알 수 있다.

스스로 하기 / 풀이

3 $m=300$, $\sigma=10$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$$E(\overline{X})=m=300$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}$$

인 정규분포 $N\left(300,\ \dfrac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

(1) $n=25$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \dfrac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(300,\ 2^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(\overline{X}\ge302)\\&=P(Z\ge1)\\&=0.5-P(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=\mathbf{0.1587}\end{aligned}$$

(2) $n=100$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \dfrac{10^2}{100}\right)$, 즉 $N(300,\ 1^2)$을 따르므로

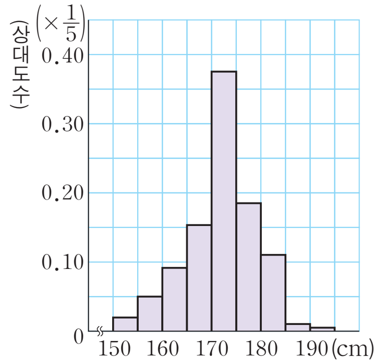
$$\begin{aligned}&P(\overline{X}\ge302)\\&=P(Z\ge2)\\&=0.5-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=\mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

(3) $n=225$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$, 즉 $N\left(300,\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(\overline{X}\ge302)\\&=P(Z\ge3)\\&=0.5-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=\mathbf{0.0013}\end{aligned}$$

보충 학습

본문에 있는 상대도수의 그래프를 보다 엄밀하게 그리면 다음과 같다.



상대도수의 축에 $\left(\times\frac{1}{5}\right)$이라고 쓴 것, 즉 $\frac{1}{5}$을 곱한 것은 히스토그램에서 각 직사각형의 넓이가 상대도수와 같게 하기 위해서이다. 즉, 각 직사각형의 밑변의 길이가 5이므로 높이를 상대도수의 $\frac{1}{5}$로 해야 직사각형의 넓이가 상대도수와 같게 된다. 이렇게 함으로써 직사각형 전체의 넓이의 합이 1이 된다.

200



모 둠 학 습

- **학습 목표**- 표본평균과 모평균의 관계를 알아보자.
- **학습 방법**- 모평균과 표본평균을 이용하여 각 모둠 과제를 해결한다.
- **모둠의 구성**- 각자가 속한 모둠에 대하여 다음 표에 적어 보자.

모둠 이름	모둠 인원: 명 으뜸이: 발표자:
	모둠 구성원 이름:

오른쪽 표는 어느 고등학교 2학년 남학생 200명 전체의 키를 번호순으로 나열한 것이다. 이 자료에서

모평균: $m=171.34$

모분산: $\sigma^2=50.5644$

모표준편차: $\sigma≒7.1109$

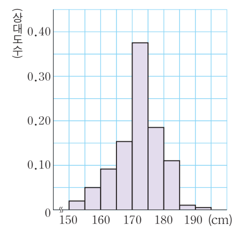
이다.

(단위: cm)

번호	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	173	177	174	171	172	174	172	179	178	167
01	164	172	173	173	178	165	177	177	186	179
02	165	171	175	169	182	174	171	173	179	162
03	173	175	183	168	175	174	165	183	171	180
04	178	178	161	158	178	169	167	171	172	180
05	180	170	171	181	179	176	173	165	174	181
06	188	172	180	174	171	171	176	154	165	182
07	166	172	183	174	170	177	170	173	170	171
08	173	170	162	166	170	170	164	178	179	165
09	156	155	162	175	161	163	176	191	180	180
10	181	174	172	174	171	169	168	172	177	174
11	174	160	153	169	171	168	171	170	172	172
12	171	172	172	175	176	164	174	172	175	180
13	154	151	168	166	181	179	172	180	173	165
14	173	173	162	179	168	181	164	172	168	168
15	171	173	166	160	163	169	161	165	176	180
16	176	170	174	170	180	171	170	175	170	176
17	173	179	184	168	169	167	159	155	158	156
18	170	169	162	169	171	177	181	171	173	175
19	176	171	164	173	170	177	160	156	155	158

이를 상대도수의 분포표와 그 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상 ~ 155미만	4	0.020
155 ~ 160	10	0.050
160 ~ 165	18	0.090
165 ~ 170	31	0.155
170 ~ 175	75	0.375
175 ~ 180	37	0.185
180 ~ 185	22	0.110
185 ~ 190	2	0.010
190 ~ 195	1	0.005
합계	200	1.000



모둠 학습

| 모둠 과제1 |

답안 예시

(i) 재광(제비뽑기)

키: 172, 183, 183, 171, 172, 179, 170, 171, 179, 171

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(172+183+183+171+172+179+170+171+179+171)$
$=175.10$

(ii) 인수(난수표)

키: 170, 170, 170, 155, 172, 167, 168, 162, 178, 179

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(170+170+170+155+172+167+168+162+178+179)$
$=169.10$

(iii) 은영(컴퓨터)

키: 176, 164, 174, 161, 171, 173, 181, 167, 170, 177

$\overline{X}$의 값: $\frac{1}{10}(176+164+174+161+171+173+181+167+170+177)$
$=171.40$

그러므로 재광, 인수, 은영의 결과와 모평균 $m=171.34$의 차이는 다음 표와 같다.

201

*각 모둠별로 토론하여 모둠 과제를 해결한 후, 발표자가 그 결과를 발표해 보세요.

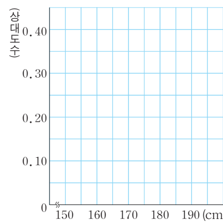
| 모둠 과제1 | 학생 각자가 제비뽑기, 난수표, 계산기 또는 컴퓨터를 이용하여 10명의 표본을 택하고, 이들의 키를 기록하여라. 또 10개의 표본에 대한 표본평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제2 | 모둠에 속한 학생 각자가 | 모둠 과제1 | 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제3 | 학급의 모든 학생 각자가 | 모둠 과제1 | 에서 구한 표본평균의 값들을 기록하여라. 또 이 값들의 평균을 구하고, 이를 모평균과 비교하여라.

| 모둠 과제4 | | 모둠 과제3 | 에 있는 값들에 대한 상대도수의 분포표를 만들고, 그 그래프를 히스토그램으로 그려라. 또 이들을 200쪽에 있는 모집단의 상대도수의 분포표 및 그 그래프와 비교하여라.

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만		
155 ~160		
160 ~165		
165 ~170		
170 ~175		
175 ~180		
180 ~185		
185 ~190		
190 ~195		
합계		



학생	재광	인수	은영
표본평균의 값	175.10	169.10	171.40
모평균과의 차이	3.76	2.24	0.06

| 모둠 과제2 |

답안 예시

| 모둠 과제1 | 의 재광, 인수, 은영을 하나의 모둠이라고 하면, 표본평균의 값들과 그 값들의 평균은 다음 표와 같다.

학생	재광	인수	은영	평균
표본평균의 값	175.10	169.10	171.40	171.87

평균과 모평균과의 차이는

171.87−171.34=0.53

| 모둠 과제3 |

답안 예시

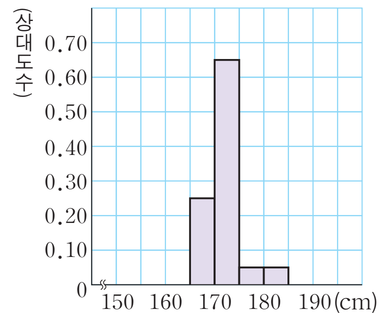
학급의 학생 수를 20명이라 하고, 학생 각자가 구한 표본평균의 값들이 다음과 같다고 하자.

175.1, 169.1, 171.4, 173.6, 171.3, 166.7, 168.5, 171.5, 173.4, 173.9, 169.0, 172.2, 170.3, 171.2, 166.1, 172.0, 173.4, 182.2, 174.1, 171.3

이 값들의 평균은 171.82이고, 모평균과의 차이는 0.475이다.

| 모둠 과제4 |

계급(cm)	도수(명)	상대도수
150이상~155미만	0	0
155 ~160	0	0
160 ~165	0	0
165 ~170	5	0.25
170 ~175	13	0.65
175 ~180	1	0.05
180 ~185	1	0.05
185 ~190	0	0
190 ~195	0	0
합계	20	1



이 결과는 166쪽의 모집단의 상대도수의 분포표 및 그 그래프와 같이 170 이상 175 이하의 도수가 가장 많은 종 모양의 분포이다.

소단원의 학습 목표

1. 추정의 뜻을 안다.
2. 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해한다.
3. 모평균의 신뢰구간을 구하고, 이를 해석할 수 있다.

여기서 배우는 용어 및 기호

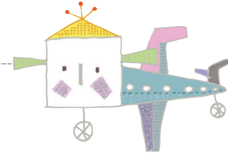
추정, 신뢰도, 신뢰구간

202

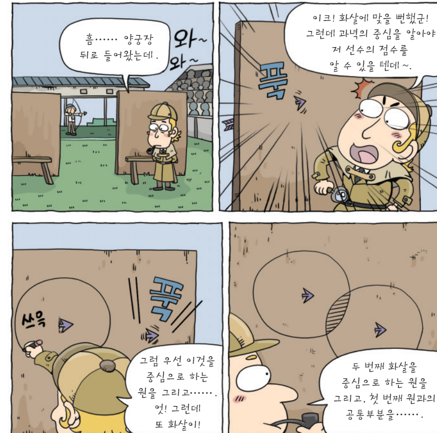
2 통계적 추정

2 모평균의 추정

학습 목표
- 추정의 뜻을 안다.
- 신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 이해한다.
- 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.



다 가 서 기 / **과녁의 중심 찾기**





양궁 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심을 찾는 것은 어려운 일이다. 그러나 과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다. 그리고 화살이 많이 있을수록 중심을 찾을 확률은 더 높아진다.

통계적 추정은 이와 같이 꽂힌 화살(표본)을 이용하여 과녁판의 뒤쪽에서 과녁의 중심(모평균)을 찾는 것과 같다.

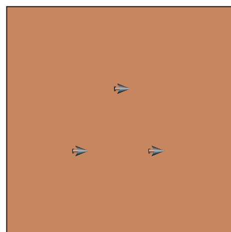


다가서기 / 해설

양궁은 올림픽 종목의 하나로 부분별로 점수가 정해져 있는 표적을 쏘아, 합산한 점수가 높은 쪽이 승리하는 경기이다. 과녁의 중앙 부분으로 갈수록 점수가 높아 선수들은 중앙 부분을 맞히려고 한다.

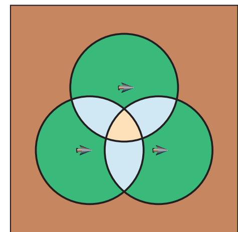
따라서 과녁판의 뒤에 꽂힌 화살을 보고 과녁의 중심을 예측할 수 있다.

오른쪽 그림은 화살이 3개가 꽂힌 과녁판을 뒤에서 본 것이다.



과녁판에 꽂힌 화살을 중심으로 원을 그리면 과녁의 중심이 그 원 안에 있을 확률이 높다.

그러므로 3개의 화살을 중심으로 각각 원을 그리면 겹쳐지는 부분이 많은 부분에, 즉 황토색 부분보다는 녹색 부분에, 녹색 부분보다는 파란색 부분에, 파란색 부분보다는 귤색 부분에 과녁의 중심이 있을 확률이 높다.



따라서 화살이 많이 있을수록 겹쳐지는 부분이 많아져 과녁의 중심을 찾을 확률이 높아진다.

203

01 모평균의 추정

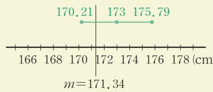
탐 구 하 기 / 신뢰구간 만들기

앞의 200쪽에 주어진 키의 자료는 정규분포 $N(171.34,\ 7.1109^2)$을 따른다고 할 수 있다. 이 자료에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이 모집단에서 크기 $n=25$인 표본을 택하고 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $E(\overline{X})$와 $V(\overline{X})$를 구하여라.
2. 크기 $n=25$인 표본을 실제로 임의추출하고, 그 표본평균의 값 $\overline{x}$를 구하여라.



3. $\overline{x}=173$에 대하여 아래와 같은 끝값을 가지는 구간을 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이와 같은 방법으로 물음 2에서 구한 $\overline{x}$에 대하여 아래의 끝값을 가지는 구간을 나타내어라.

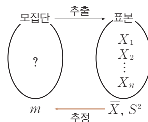


왼쪽 끝값: $\overline{x}-1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$, 오른쪽 끝값: $\overline{x}+1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}$

4. 각자 만든 구간을 발표하고, 다른 사람이 만든 구간을 위의 그림에 함께 그려라.
5. 여러 사람이 만든 구간 중 $m=171.34$를 포함하는 비율을 구하여라.

알 아 보 기 / 모평균을 추정하여 보자.

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 표준편차 등을 추측하는 방법을 **추정**이라고 한다. 이를테면 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m을 추정할 수 있다.



이제 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 이루는 모집단에서 크기 n인 표본 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

탐구하기 / 풀이

1. 모평균이 171.34이고 모분산이 7.1109^2이므로

$E(\overline{X})=\mathbf{171.34}$

$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\mathbf{\dfrac{7.1109^2}{25}}$

2. 답안 예시

크기 $n=25$인 표본을 택하면

173, 156, 171, 173, 175, 170, 178, 163, 164, 168, 164, 162, 165, 162, 181, 173, 168, 174, 177, 160, 170, 169, 171, 172, 174

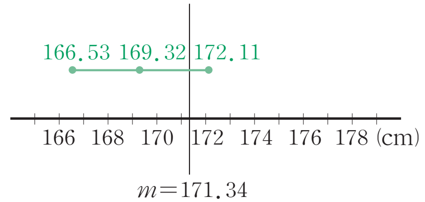
$\overline{x}=(173+156+\cdots+172+174)\div25$
$=\mathbf{169.32}$

3. 왼쪽 끝값:

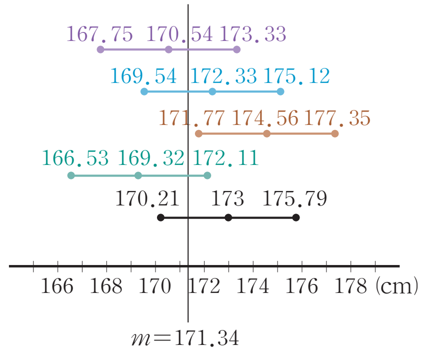
$169.32-1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}\fallingdotseq166.53$

오른쪽 끝값:

$169.32+1.96\times\dfrac{7.1109}{\sqrt{25}}\fallingdotseq172.11$



4. 답안 예시



5. 답안 예시

물음 4의 구간 중 $m=171.34$를 포함하는 비율은

$\dfrac{4}{5}\times100=\mathbf{80(\%)}$

알아보기 / 해설

모집단 전체를 조사하기 어려우므로 표본조사를 하여 모집단에 대한 정보를 얻는 것이 통계학의 기본이다. 따라서 모평균, 모분산, 모표준편차 등은 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차와 밀접한 관련이 있으며, 모평균을 모를 때에 표본평균을 사용하는 것은 지극히 당연한 것이다. 한편, 모평균을 추정하기 위하여 표본평균을 사용한다면 표본평균 $\overline{X}$의 분포(교과서 198쪽 참조)를 알아야 한다.

알아보기 / 해설

- $\mathrm{P}\left(-1.96\le\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.96\right)=0.95$

  에서

  $$-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.96$$

  $$\Longleftrightarrow\ -1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  $$\Longleftrightarrow\ -\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le-m\le-\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  $$\Longleftrightarrow\ \overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  임을 알 수 있다. 그러므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은 위의 식에서 $\overline{X}$의 자리에 그 측정값 $\overline{x}$를 대입하여 구한다.

- 모평균에 대한 신뢰구간은 추출되는 표본에 따라 달라진다. 그러므로 표본조사를 여러 번 반복할 때마다 신뢰구간도 달라져서 그중에는 모평균 m을 포함하는 것도 있고 m을 포함하지 않는 것도 있다.
  이때, 모평균 m을 포함하는 신뢰구간을 갖는 표본이 약 95 %가 되는 것을 '신뢰도 95 %인 신뢰구간' 이라고 한다.

- $\mathrm{P}\left(-2.58\le\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le2.58\right)=0.99$에서

  $$-2.58\le\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le2.58$$

  $$\Longleftrightarrow\ -2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  $$\Longleftrightarrow\ -\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le-m\le-\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

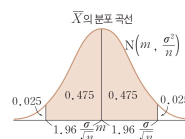
  $$\Longleftrightarrow\ \overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

204

따라서 $\overline{X}$를 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

은 표준정규분포 N(0, 1)을 따르므로 $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$이다. 즉



$$\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.96\right)=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때, 다음과 같은 구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

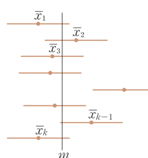
를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %인 **신뢰구간**이라고 한다.



네이만(Neyman, J. ; 1894~1981)
폴란드 태생의 미국 통계학자로서 1937년 신뢰구간의 개념을 창안하였다.

표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 따라서 신뢰구간도 달라진다.

그러므로 '신뢰도 95 %인 신뢰구간' 의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 이들 중 모평균 m을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.



한편 $\mathrm{P}(|Z|\le2.58)=0.99$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

모평균 m의 신뢰구간

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우에 표본의 크기 n이 클 때에는 σ대신 표본표준편차 S를 이용할 수 있다.

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$를 대입하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구한다.

보충 학습

$\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)에서

$$\left(\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때, $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 '신뢰구간의 길이' 라고 한다.

신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 클수록 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

함께하기 / 익힘책 157쪽 | 익힘책 158쪽 | 익힘책 159쪽

1 어떤 회사에서 생산하는 통조림의 무게는 평균이 m g이고, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통조림 25개를 임의추출하여 표본평균을 구하였더니 그 값이 502 g이 되었을 때, 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

풀이

$n=25$, $\bar{x}=502$, $\sigma=10$이므로

(i) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$502-1.96\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-3.92\le m\le 502+3.92$$

$$\therefore \mathbf{498.08\le m\le 505.92}$$

(ii) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$502-2.58\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 502+2.58\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$502-5.16\le m\le 502+5.16$$

$$\therefore \mathbf{496.84\le m\le 507.16}$$

스스로 하기 / 익힘책 157쪽 | 익힘책 158쪽 | 익힘책 159쪽

1 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 추출하여 그 평균을 구했더니 60이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %, 99 %인 신뢰구간을 각각 구하여라.

2 어느 회사에서 생산하는 음료수의 A 성분의 함유량은 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료수 400병을 임의추출하여 A 성분의 함유량을 검사하였더니 평균이 30.5 mg, 표준편차가 5.8 mg이었다. 이 음료수 1병에 담긴 A 성분의 평균 함유량 m에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

(2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

함께하기 / 해설

1 (i) 신뢰도 95 %인 신뢰구간

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(ii) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 식에 표본의 크기 n, 표본평균의 값 $\bar{x}$ 및 모표준편차 σ의 값을 대입하여 신뢰구간을 구한다.

스스로 하기 / 풀이

1 $n=100$, $\bar{x}=60$, $\sigma=6$이므로

(i) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$60-1.96\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le 60+1.96\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.176\le m\le 60+1.176$$

$$\therefore \mathbf{58.824\le m\le 61.176}$$

(ii) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$60-2.58\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le 60+2.58\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$$60-1.548\le m\le 60+1.548$$

$$\therefore \mathbf{58.452\le m\le 61.548}$$

2 $n=400$, $\bar{x}=30.5$, $\sigma(\bar{x})=5.8$

표본의 크기 $n=400$이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉,

$\sigma=\sigma(\bar{x})=5.8$

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$30.5-1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m\le 30.5+1.96\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.5684\le m\le 30.5+0.5684$$

$$\therefore \mathbf{29.9316\le m\le 31.0684}$$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$30.5-2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}\le m\le 30.5+2.58\frac{5.8}{\sqrt{400}}$$

$$30.5-0.7482\le m\le 30.5+0.7482$$

$$\therefore \mathbf{29.7518\le m\le 31.2482}$$

공학 도구 / 해설

- 엑셀 프로그램의 CONFIDENCE 함수를 이용하면 신뢰구간을 쉽게 구할 수 있다.

본문의 내용은 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하는 것인데, Alpha에는

'1−(신뢰도)'

의 값을 입력하는 것에 주의한다.

따라서 신뢰도 95 %는 0.95이므로

$1-0.95=0.05$

를 Alpha에 입력한다.

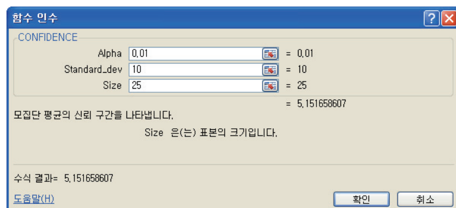
만약 신뢰도 99 %이면 Alpha에는

$1-0.99=0.01$

을 입력한다.

한편 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 결과 값은 신뢰도 95 %인 경우에는 $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이, 신뢰도 99 %인 경우에는 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 계산된다.

- 교과서 205쪽의 함께하기 **1**에서 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 엑셀 프로그램을 이용하여 구하면 다음과 같다.



여기서 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 5.151658607이므로 $2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\fallingdotseq 5.15$로 계산하면 모평균 m의 99 %인 신뢰구간은 다음과 같다.

$502-5.15\le m\le 502+5.15$

$\therefore\ 496.85\le m\le 507.15$

공학 도구

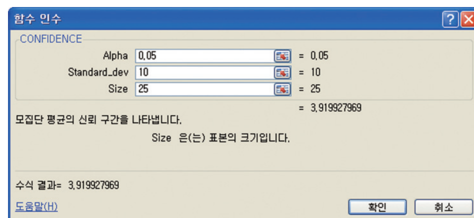
*수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 신뢰구간 구하기

컴퓨터 프로그램의 CONFIDENCE 함수를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.
이를테면 205쪽의 함께하기 **1**에서 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 다음 순서로 구하여 보자.

1단계 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭하면 '함수 마법사' 대화 상자가 나타난다.
이때, 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'CONFIDENCE'를 선택한 후 확인을 클릭하면 '함수 인수' 대화 상자가 나타난다.

2단계 Alpha에 {1−(신뢰도)}, Standard_dev에 표준편차, Size에 표본의 크기를 입력한 후 확인을 클릭한다.
여기서는 신뢰도가 95 %, 표준편차가 10, 표본의 크기가 25인 경우이므로 Alpha에 0.05, Standard_dev에 10, Size에 25를 입력한다.



3단계 위의 1, 2, 3단계를 실행하면 그 결과가 3.919927969로 나온다.
여기서 3.919927969를 소수 셋째 자리에서 반올림하여 3.92로 쓰자.

4단계 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$502-3.92\le m\le 502+3.92$

$\therefore\ 498.08\le m\le 505.92$

참고 | 추정

통계적 추정에는 점추정(點推定, point estimation)과 구간추정(區間推定, interval estimation)이 있다.

(1) 점추정: 모집단의 평균, 분산 또는 비율 등을 하나의 실수로 추정하는 것이다. 이를테면 표본평균으로 모평균을 추정하고, 표본분산으로 모분산을 추정하는 것이 점추정이다.

(2) 구간추정: 모집단의 평균, 분산 또는 비율 등을 하나의 구간으로 추정하는 것이다.

우리는 구간추정만을 다루고 있으나 사실은 이미 점추정의 개념을 쓰고 있다. 이를테면 모평균의 구간추정에서 표본평균을 사용하는 것이 그 예이다.

중단원 확인하기

새로 나온 용어와 기호
모집단, 전수조사, 표본, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, $\bar{X}$

V-2. 통계적 추정

모집단과 표본

의사소통

1 다음 각 경우의 예를 하나씩 들어라.

(1) 전수조사를 해야 하는 경우

(2) 표본조사를 해야 하는 경우

표본평균의 분포

계산

2 어떤 지역의 가구당 월 소득은 평균이 3000000원, 표준편차가 500000원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 중에서 25가구를 임의추출할 때, 월 소득의 표본평균 $\bar{X}$에 대하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(\bar{X} \le 2800000)$ (2) $P(2700000 \le \bar{X} \le 3200000)$

모평균의 추정

문제 해결

3 어떤 화훼 농가에서 생산하는 꽃의 개화 시간은 표준편차가 10시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산한 꽃 100송이의 개화 시간을 조사하였더니 표본평균이 96시간이었다. 이 농가에서 생산하는 꽃의 평균 개화 시간에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

모평균의 추정

문제 해결

4 어느 지역 고등학생의 몸무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 고등학생 100명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 표본평균은 56.5 kg, 표본표준편차는 6.3 kg이었다. 이 지역 고등학생의 몸무게의 평균을 신뢰도 95 %로 추정하여라.

표본 크기의 결정

이해

5 어떤 테이프의 길이는 표준편차가 6.2 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 테이프의 길이의 평균에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구할 때, 신뢰구간의 폭을 2 cm 이내로 하려면 표본의 크기를 얼마 이상으로 해야 하는가?



중단원 확인하기 / 풀이

1 (1) 우리나라 전체 인구 조사 등

(2) 가전제품의 수명 시간 조사 등

2 $n=25$, $m=3000000$, $\sigma=500000$이므로 표본평균 $\bar{X}$는 정규분포 $N(3000000, 100000^2)$을 따른다.

(1) $P(\bar{X} \le 2800000)$

$=P\left(Z \le \dfrac{2800000-3000000}{100000}\right)$

$=P(Z \le -2)$

$=P(Z \ge 2)$

$=0.5-P(0 \le Z \le 2)$

$=0.5-0.4772=\mathbf{0.0228}$

(2) $P(2700000 \le \bar{X} \le 3200000)$

$=P\left(\dfrac{2700000-3000000}{100000} \le Z \le \dfrac{3200000-3000000}{100000}\right)$

$=P(-3 \le Z \le 2)$

$=P(-3 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 2)$

$=P(0 \le Z \le 3)+P(0 \le Z \le 2)$

$=0.4987+0.4772=\mathbf{0.9759}$

3 $n=100$, $\bar{x}=96$, $\sigma=10$이므로 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$96-2.58\dfrac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 96+2.58\dfrac{10}{\sqrt{100}}$

$96-2.58 \le m \le 96+2.58$

$\therefore \mathbf{93.42 \le m \le 98.58}$

4 $n=100$, $\bar{x}=56.5$, $\sigma=6.3$이므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$56.5-1.96\dfrac{6.3}{\sqrt{100}} \le m \le 56.5+1.96\dfrac{6.3}{\sqrt{100}}$

$56.5-1.2348 \le m \le 56.5+1.2348$

$\therefore 55.2652 \le m \le 57.7348$

즉, 신뢰도 95 %로 추정하였을 때, 이 지역 고등학생의 몸무게의 평균은 **55.2652 kg과 57.7348 kg 사이의 값이 될 것이다.**

5 $\sigma=6.2$이므로 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}$

이때, 신뢰구간의 폭이 2 cm 이내이어야 하므로

$\bar{x}+1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}-\left(\bar{x}-1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}}\right) \le 2$

$2 \times 1.96\dfrac{6.2}{\sqrt{n}} \le 2 \quad \therefore n \ge 147.671104$

따라서 표본의 크기를 **148** 이상으로 해야 한다.

중단원 평가 문제



정답과 풀이 p.313

01 바탕

다음 중에서 전수조사를 해야 하는 경우는?

① 선거에서 유권자를 확인하는 경우
② TV 프로그램의 시청률을 구하는 경우
③ 가전제품의 수명 시간을 조사하는 경우
④ 공산품 중에서 불량품의 비율을 조사하는 경우
⑤ 어떤 질병에 대한 새로운 치료약을 개발하는 경우

02 기본

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 각각 적힌 5개의 공이 주머니에 들어 있다. 다음과 같이 추출하는 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원으로 2개를 추출한다.
(2) 비복원으로 2개를 추출한다.

03 기본

모집단 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})$ (2) $\mathrm{V}(\overline{X})$ (3) $\sigma(\overline{X})$

04 바탕

정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 4 이상 6 이하일 확률을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$)

05 기본

어느 과수원에서 생산하는 포도 1송이의 무게는 평균 600 g, 표준편차 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 포도 16송이를 임의추출하여 그 무게를 조사할 때, 표본평균이 590 g 이상 605 g 이하인 확률을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$)

06 실력

어느 공장에서 생산하는 형광등의 수명은 모평균 1500시간, 모표준편차 100시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 형광등 중에서 n개를 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때,

$\mathrm{P}\left(\overline{X} \ge 1400+\dfrac{200}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$가 성립하는 n의 최솟값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.65)=0.45$)

모표준편차를 모를 때에는 표본표준편차를 사용한다.

07 기본

어느 지역에서 고등학생 400명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 표본평균은 65.5 kg, 표본표준편차는 5 kg이었다. 이 지역 고등학생의 몸무게의 평균에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

08 기본

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 n개의 표본을 택하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자. 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이가 모표준편차의 $\dfrac{1}{5}$ 이내일 때, 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

대단원 평가 문제



정답과 풀이 p.315

01

다음 중에서 표본조사의 장점이 아닌 것은?

① 시간의 단축　② 경비의 절감
③ 정확성의 제고　④ 투명성의 확보
⑤ 한 번 검사하면 파괴되어서 그 물건을 못 쓰게 되는 검사에도 가능

02

확률변수 X의 평균이 5, 표준편차가 1일 때, 확률변수 $Y=2X^2+X+1$의 평균은?

① 5　② 16　③ 58
④ 61　⑤ 88

03

주사위를 360번 던져서 4의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 표준편차를 순서대로 바르게 짝지은 것은?

① 60, 50　② 60, $4\sqrt{2}$　③ 60, $5\sqrt{2}$
④ 90, 50　⑤ 90, $5\sqrt{2}$

04

5개의 제품 중에 2개의 불량품이 들어 있다. 이 중에서 2개의 제품을 동시에 꺼낼 때 나오는 불량품의 개수를 확률변수 X라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(X\geq 1)$은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{3}{10}$　③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{7}{10}$　⑤ $\frac{9}{10}$

05

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)=a,$$
$$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)=b$$

일 때, $\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m+2\sigma)$를 a, b에 대한 식으로 옳게 나타낸 것은?

① $a+b$　② $a+2b$　③ $a+3b$
④ $2a+b$　⑤ $2a+2b$

06

연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=4x^3 \quad (0\le x\le 1)$$

일 때, X의 분산은?

① $\frac{2}{75}$　② $\frac{4}{25}$　③ $\frac{1}{15}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

07

다음 중 표본의 크기, 신뢰도 및 신뢰구간 사이의 관계에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.
② 신뢰도가 낮아질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
③ 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
④ 표본의 크기가 커져도 신뢰구간의 길이는 일정하다.
⑤ 신뢰도가 높아지고 표본의 크기가 작아질수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

08

어느 회사 제품의 10 %가 3년 이내에 고장이 난다고 한다. 이 회사 제품 100개에 대하여 3년 이내에 고장나는 제품의 수를 확률변수 X라고 할 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 90　② 94　③ 100　④ 109　⑤ 115

09

어느 과수원에서 생산하는 메론 1개의 무게는 평균이 500 g, 표준편차가 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 25개의 메론을 임의추출하여 그 무게를 조사할 때, 표본평균이 490 g 이상 510 g 이하일 확률은? (단, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$)

① 0.4938　② 0.5228　③ 0.7056　④ 0.8123　⑤ 0.9876

10

500원짜리 동전 2개와 100원짜리 동전 1개를 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전을 상금으로 갖는다. 상금의 액수를 확률변수 X라고 할 때, X의 분산은?

① 95500　② 10800　③ 113400　④ 127500　⑤ 155600

11

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 25개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 표본평균이 32.2 g, 표본표준편차가 0.5 g이었고, 이 제품의 평균 무게 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은?

① 0.392 ② 0.412 ③ 0.498
④ 0.534 ⑤ 0.615

12

정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 확률변수 Y가 $Y=2X+50$일 때, 확률 $\mathrm{P}(Y \le 100)$은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772

① 0.1915 ② 0.3413 ③ 0.4772
④ 0.6915 ⑤ 0.8413

13

정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음을 만족하는 n의 최솟값은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.81	0.465
1.96	0.475
2.05	0.480

$$\mathrm{P}(9 \le \overline{X} \le 11) \ge 0.95$$

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

14

어느 회사에서 생산되는 약의 무게는 표준편차가 0.1 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 약 중 n개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 2 g이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $1.951 \le m \le 2.049$일 때, n의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

15

한 개의 주사위를 36번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 한다. 이때, $\mathrm{E}((X-a)^2)$의 최솟값이 b일 때, $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

16 UP!!

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(400-x)$를 만족한다. $\mathrm{P}(X \le m+10)=0.8413$일 때, 확률 $\mathrm{P}(X \ge 220)$은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3413 ⑤ 0.4772

17 서술형

1000명이 응시한 어떤 어학 시험의 점수는 평균이 600점, 표준편차가 75점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 750점 이상인 사람은 약 몇 명인지 구하여라.
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$)

(2) 상위 10 %에 들기 위한 최저 점수는 약 몇 점인지 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)=0.4$)

18 서술형

어느 공장에서 생산하는 음료수의 무게 X의 분포는 평균이 1000 mL, 표준편차가 100 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 음료수 중에서 임의추출한 400개의 표본평균이 1010 mL 이상일 확률을 p_1, 990 mL 이상 1005 mL 이하일 확률을 p_2라고 할 때, p_2-p_1의 값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)=0.3413$,
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$)

수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

$${}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{210}{2^{10}}=\frac{105}{512}$$

답 $\frac{105}{512}$

19 1단계 $P(A\cap B)$의 값을 구한다.

두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-P(A\cup B)$$
$$=\frac{17}{12}-P(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$

2단계 $P(A\cap B)$의 범위를 구한다.

$P(A\cup B)\le 1$, $P(A\cup B)\ge P(A)$, $P(A\cup B)\ge P(B)$이므로

$$\frac{3}{4}\le P(A\cup B)\le 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

3단계 $P(A\cap B)$의 범위를 구한다.

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{5}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{2}{3}$$

답 $\frac{5}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{2}{3}$

20 1단계 둘 중 한 사람만 명중시키는 사건을 나타낸다.

두 선수 A, B가 명중시키는 사건을 각각 A, B라고 하면 A는 명중시키고 B는 명중시키지 못하는 사건은

$A\cap B^C$

A는 명중시키지 못하고 B는 명중시키는 사건은

$A^C\cap B$

2단계 둘 중 한 사람만 명중시킬 확률을 구한다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$P((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B))$$
$$=P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)$$
$$=P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

V 통계

중단원 평가 문제

▶ 1. 확률분포 / P_244

01 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$$
$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

답 풀이 참조

02 $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^1 f(x)dx=1$, 즉 $\int_0^1 ax^3dx=1$이므로

$$\left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^1=\frac{a}{4}=1 \qquad \therefore a=4$$

답 ④

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$$

확률변수 X의 평균이 -1이므로

$$-a\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-1$$
$$-\frac{1}{4}a=-1 \qquad \therefore a=4$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$V(X)=(-4)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-(-1)^2$$
$$=11$$

답 ⑤

04 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$V(X)=96-15=81$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{81}=9$

답 ②

05 $E(X)=\int_0^4 x\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx$

$=\int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^4=\frac{4}{3}$

$V(X)=\int_0^4 x^2\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2$

$=\int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{16}{9}$

$=\left[-\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{6}x^3\right]_0^4-\frac{16}{9}$

$=\frac{8}{3}-\frac{16}{9}=\frac{8}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 $E(X)=\frac{4}{3}$, $V(X)=\frac{8}{9}$, $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

06 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 500원짜리 동전 2개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	상금(원)
H	H	1000
H	T	500
T	H	500
T	T	0

확률변수 X가 갖는 값은 0, 500, 1000이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	500	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{2}+1000\times\frac{1}{4}=500$

$\therefore E(2X+300)=2E(X)+300$

$=2\times500+300=1300$

답 ③

07 타율이 2할이므로 이 선수가 한 번의 타석에서 안타를 칠 확률은 0.2이다. 안타를 친 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 이항분포 $B(4,\ 0.2)$를 따른다. 즉,

$P(X=x)={}_4C_x\cdot0.2^x\cdot0.8^{4-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4$)

따라서 세 번 이상 안타를 칠 확률은

$P(X\geq3)=P(X=3)+P(X=4)$

$={}_4C_3\cdot0.2^3\cdot0.8^1+{}_4C_4\cdot0.2^4\cdot0.8^0$

$=0.0256+0.0016$

$=0.0272$

답 ①

08 불량률이 5 %이므로 한 개의 제품을 생산할 때 그것이 불량품일 확률은 0.05이다.

확률변수 X의 확률분포는 이항분포 $B(100,\ 0.05)$를 따르므로

$E(X)=100\times0.05=5$

$V(X)=100\times0.05\times0.95=4.75$

$\sigma(X)=\sqrt{4.75}$

답 $E(X)=5$, $V(X)=4.75$, $\sigma(X)=\sqrt{4.75}$

09 노란 공이 x개, 파란 공이 4개 들어 있는 주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 노란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{x}{x+4}$이다. 이러한 시행을 n번 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{x}{x+4}\right)$를 따른다.

확률변수 X의 평균이 12, 분산이 3이므로

$E(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}=12$ ……㉠

$V(X)=n\cdot\frac{x}{x+4}\cdot\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\left(1-\frac{x}{x+4}\right)=3,\ \frac{4}{x+4}=\frac{1}{4}$ $\therefore x=12$

$x=12$를 ㉠에 대입하면

$n\cdot\frac{12}{12+4}=12$ $\therefore n=16$

$\therefore x+n=12+16=28$

답 28

10 $Z=\frac{X-100}{20}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 80)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{80-100}{20}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le -1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 1)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$\mathrm{P}(|Z|\le 1)=0.6826$에서
$\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=0.6826$
$2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.6826$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$
$\therefore \mathrm{P}(X\le 80)=0.5-0.3413=0.1587$

답 0.1587

11 국어, 영어, 수학 성적을 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라고 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 15^2)$, $\mathrm{N}(74,\ 16^2)$, $\mathrm{N}(76,\ 18^2)$을 따른다.

$Z_1=\frac{X_1-70}{15}$, $Z_2=\frac{X_2-74}{16}$, $Z_3=\frac{X_3-76}{18}$

이라고 하면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

세린이의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 표준화하면

$Z_1=\frac{X_1-70}{15}=\frac{85-70}{15}=1$

$Z_2=\frac{X_2-74}{16}=\frac{82-74}{16}=\frac{1}{2}$

$Z_3=\frac{X_3-76}{18}=\frac{92-76}{18}=\frac{8}{9}$

$\therefore Z_2<Z_3<Z_1$

따라서 상대적으로 성적이 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

답 국어, 수학, 영어

12 응시자의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(700,\ 40^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{X-700}{40}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{350}{5000}=0.07$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-700}{40}\right)=0.07$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-700}{40}\right)=0.07$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-700}{40}\right)=0.43$

그런데 주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{k-700}{40}=1.5$ $\quad\therefore k=760$

따라서 합격자의 최저 점수는 760점이다.

답 760점

▶ 2. 통계적 추정 / P_264

01 ① 선거에서 유권자 확인은 모든 사람을 조사해야 한다.

답 ①

02 (1) 추출된 원소를 다시 되돌려 놓은 후 다음 원소를 뽑는 것이 복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$5\times 5=25$(가지)

(2) 추출된 원소를 다시 되돌려 놓지 않고 다음 원소를 뽑는 것이 비복원추출이다.
따라서 구하는 방법은
$5\times 4=20$(가지)

답 (1) 25가지 (2) 20가지

03 모집단 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 그 숫자를 각각 X_1, X_2라고 하면 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$는 X_1, X_2의 값에 따라 다른 값을 가진다.

X_1 \ X_2	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

표본평균 $\overline{X}$의 분포를 표로 나타내면

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	6	7	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

(1) $E(\overline{X})=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{8}+\cdots+7\times\frac{1}{16}$
$=4$

(2) $V(\overline{X})$
$=1^2\times\frac{1}{16}+2^2\times\frac{1}{8}+\cdots+7^2\times\frac{1}{16}-4^2$
$=\frac{5}{2}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

04 모집단이 정규분포 $N(5,\ 2^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 $E(\overline{X})=5$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$인 정규분포 $N\left(5,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{2}}$라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균 $\overline{X}$가 4 이상 6 이하인 경우는 $4\le\overline{X}\le6$일 때이므로

$P(4\le\overline{X}\le6)=P\left(\frac{4-5}{\frac{1}{2}}\le\frac{\overline{X}-5}{\frac{1}{2}}\le\frac{6-5}{\frac{1}{2}}\right)$
$=P(-2\le Z\le2)$
$=2P(0\le Z\le2)$
$=2\times0.4772=0.9544$

답 0.9544

05 $m=600$, $\sigma=20$, $n=16$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=m=600$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{20}{\sqrt{16}}=5$

인 정규분포 $N(600,\ 5^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-600}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균이 590 g이상 605 g이하인 경우는 $590\le\overline{X}\le605$일 때이므로

$P(590\le\overline{X}\le605)$
$=P\left(\frac{590-600}{5}\le Z\le\frac{605-600}{5}\right)$
$=P(-2\le Z\le1)$
$=P(-2\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)$
$=P(0\le Z\le2)+P(0\le Z\le1)$
$=0.4772+0.3413=0.8185$

답 0.8185

06 $m=1500$, $\sigma=100$이고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$E(\overline{X})=m=1500$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{100}{\sqrt{n}}$

인 정규분포 $N\left(1500,\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P\left(\overline{X}\ge1400+\frac{200}{\sqrt{n}}\right)\ge0.95$에서

$P\left(Z\ge\frac{1400+\frac{200}{\sqrt{n}}-1500}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.95$

$P(Z\ge2-\sqrt{n})\ge0.95$

이때,

$P(Z\ge-1.65)=P(Z\le1.65)$
$=0.5+P(0\le Z\le1.65)$
$=0.5+0.45=0.95$

이므로 $2-\sqrt{n}\le-1.65$ $\therefore n\ge13.3225$

따라서 n의 최솟값은 14이다.

답 14

07 $n=100$, $\overline{x}=65.5$, $\sigma(\overline{x})=5$

표본의 크기 $n=100$이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉, $\sigma=\sigma(\overline{x})=5$

모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$65.5-2.58\times\frac{5}{\sqrt{400}}\le m\le 65.5+2.58\times\frac{5}{\sqrt{400}}$$

$65.5-0.645\le m\le 65.5+0.645$

$\therefore 64.855\le m\le 66.145$

답 $64.855\le m\le 66.145$

08 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때, 신뢰구간의 길이가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이내이므로

$$\left(\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{1}{5}\sigma$$

$$2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{5}\sigma$$

$\sqrt{n}\ge 19.6$ $\therefore n\ge 384.16$

따라서 표본의 크기는 385개 이상이어야 한다.

답 385

대단원 평가 문제

p.266~269

01 표본조사의 장점은 시간 단축, 경비 절감, 정확성의 제고 및 파괴검사에도 가능하다는 것이다. 그러나 투명성의 확보와는 관계가 없다.

답 ④

02 $\mathrm{E}(X)=5,\ \mathrm{V}(X)=1^2=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=1+5^2=26$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X^2+X+1)$

$=2\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)+1$

$=2\times26+5+1=58$

답 ③

03 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(360,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=360\times\frac{1}{6}=60$$

$$\mathrm{V}(X)=360\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=50$$

$\sigma(X)=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

답 ③

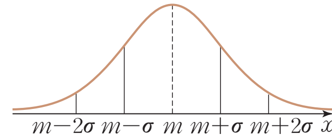
04 $\mathrm{P}(X\ge1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$$=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ④

05



위의 그림과 같이 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=a+b$

답 ①

06 $f(x)=4x^3$은 확률밀도함수이므로

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot4x^3dx=\int_0^1 4x^4dx$$

$$=\left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^1=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2\cdot4x^3dx-\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$=\int_0^1 4x^5dx-\frac{16}{25}$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^6\right]_0^1-\frac{16}{25}=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}$$

답 ①

07 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\alpha$이면 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간은

$$\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰구간의 길이는

$$\left(\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도가 높아질수록 신뢰구간의 길이는 길어지고, 표본의 크기가 커질수록 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

답 ④

08 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times0.1\times0.9=9$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=9+10^2=109$

답 ④

09 $m=500$, $\sigma=20$, $n=25$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=500,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{20}{\sqrt{25}}=4$

인 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 4^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{\overline{X}-500}{4}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균이 490 g 이상 510 g 이하인 경우는 $490\le\overline{X}\le510$일 때이므로

$\mathrm{P}(490\le\overline{X}\le510)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{490-500}{4}\le\dfrac{\overline{X}-500}{4}\le\dfrac{510-500}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le2.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)=2\times0.4938=0.9876$

답 ⑤

10 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 500원짜리 동전 2개와 10원짜리 동전 1개를 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	100원	상금(원)
H	H	H	1100
H	H	T	1000
H	T	H	600
T	H	H	600
H	T	T	500
T	H	T	500
T	T	H	100
T	T	T	0

상금의 액수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 500, 600, 1000, 1100이다.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	100	500	600	1000	1100	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{8}+100\times\dfrac{1}{8}+500\times\dfrac{1}{4}+\cdots$

$\quad+1100\times\dfrac{1}{8}$

$=550$

$\mathrm{V}(X)=0^2\times\dfrac{1}{8}+100^2\times\dfrac{1}{8}+500^2\times\dfrac{1}{4}+\cdots$

$\quad+1100^2\times\dfrac{1}{8}-550^2$

$=127500$

답 ④

11 $n=25,\ \bar{x}=32.2,\ \sigma(\bar{x})=0.5$

표본의 크기 $n=25$가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다. 즉,

$\sigma=\sigma(\bar{x})=0.5$

평균 무게 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$32.2-1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{25}}\le m\le32.2+1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{25}}$

$32.2-0.196\le m\le32.2+0.196$

$\therefore\ 32.004\le m\le32.396$

$\alpha=32.004,\ \beta=32.396$

$\therefore\ \beta-\alpha=32.396-32.004=0.392$

답 ①

12 $\mathrm{E}(X)=20,\ \mathrm{V}(X)=5^2$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+50)=2\mathrm{E}(X)+50$

$\quad=2\times20+50=90$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+50)=2^2\,\mathrm{V}(X)$

$\quad=2^2\cdot5^2=10^2$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{Y-90}{10}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(Y\le 100)&=P\left(\frac{Y-90}{10}\le\frac{100-90}{10}\right)\\&=P(Z\le 1)\\&=0.5+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 ⑤

13 $m=10$, $\sigma=2$, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 $E(\overline{X})=10$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{n}}$인 정규분포 $N\left(10, \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

여기서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(9\le\overline{X}\le 11)$

$$\begin{aligned}&=P\left(\frac{9-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.95\end{aligned}$$

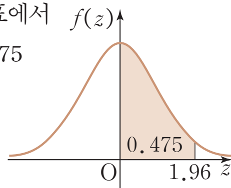
$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.475$

주어진 표준정규분포표에서

$P(0\le Z\le 1.96)=0.475$

이므로 $\quad \frac{\sqrt{n}}{2}\ge 1.96$

$\therefore n\ge 15.3664$



따라서 n의 최솟값은 16이다.

답 ②

14 $\overline{x}=2$, $\sigma=0.1$, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$2-1.96\frac{0.1}{\sqrt{n}}\le m\le 2+1.96\frac{0.1}{\sqrt{n}}$$

이때, $1.951\le m\le 2.049$이므로

$$2-1.96\frac{0.1}{\sqrt{n}}=1.951,\ \frac{0.196}{\sqrt{n}}=0.049$$

$$\sqrt{n}=\frac{0.196}{0.049}=4 \qquad \therefore n=16$$

답 ①

15 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 그러므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$E(X)=36\cdot\frac{1}{6}=6$

$V(X)=36\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=5$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=5+6^2=41\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E((X-a)^2)&=E(X^2-2aX+a^2)\\&=E(X^2)-2aE(X)+a^2\\&=41-2a\cdot 6+a^2\\&=a^2-12a+41\\&=(a-6)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $E((X-a)^2)$은 $a=6$일 때 최솟값 $b=5$이므로 $\quad a+b=6+5=11$

답 ⑤

16 $f(x)=f(400-x)$에 x대신 $200-x$를 대입하면

$f(200-x)=f(200+x)$

즉, 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=200$에 대하여 대칭이고, 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $\quad m=200$

여기서 $Z=\frac{m-200}{\sigma}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le m+10)=0.8413$에서

$$\begin{aligned}P(X\le m+10)&=P\left(Z\le\frac{m+10-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\le\frac{10}{\sigma}\right)\\&=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)\\&=0.8413\end{aligned}$$

이므로 $\quad P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.3413$

$\frac{10}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=10$

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 220) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{220-200}{10}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772$
$= 0.0228$

답 ①

17 1단계 **확률변수를 표준화한다.**

어학 시험의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 75^2)$을 따른다.

여기서 $Z = \frac{X-600}{75}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

2단계 **750점 이상인 사람의 수를 구한다.**

(1) $\mathrm{P}(X \ge 750) = \mathrm{P}\left(\frac{X-600}{75} \ge \frac{750-600}{75}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772$
$= 0.0228$

$\therefore 1000 \times 0.0228 = 22.8$

따라서 750점 이상인 사람은 약 23명이다.

3단계 **상위 10 %에 들기 위한 최저 점수를 구한다.**

(2) 구하는 최저 점수를 a라고 하면

$\mathrm{P}(X \ge a) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le X \le a)$
$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-600}{75}\right)$
$= 0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-600}{75}\right) = 0.4$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$이므로

$\frac{a-600}{75} = 1.28$

$\therefore a = 696$

따라서 구하는 최저 점수는 약 696점이다.

답 (1) 약 23명 (2) 약 696점

18 1단계 **확률변수를 표준화한다.**

$m=1000,\ \sigma=100,\ n=400$이므로 표본평균 $\overline{X}$는

$\mathrm{E}(\overline{X}) = 1000,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{100}{\sqrt{400}} = \frac{100}{20} = 5$

인 정규분포 $\mathrm{N}(1000,\ 5^2)$을 따른다.

여기서 $Z = \frac{\overline{X}-1000}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

2단계 **p_1의 값을 구한다.**

표본평균이 1010 mL 이상일 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 1010) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{1010-1000}{5}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772$
$= 0.0228 = p_1$

3단계 **p_2의 값을 구한다.**

표본평균이 990 mL 이상 1005 mL 이하일 확률은

$\mathrm{P}(990 \le \overline{X} \le 1005)$
$= \mathrm{P}\left(\frac{990-1000}{5} \le Z \le \frac{1005-1000}{5}\right)$
$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 1)$
$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= 0.4772 + 0.3413$
$= 0.8185 = p_2$

4단계 **$p_2 - p_1$의 값을 구한다.**

$p_2 - p_1 = 0.8185 - 0.0228$
$= 0.7957$

답 0.7957